Die

Elemente der Mathematik.

Ein Hülfsbuch

für

den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten

von

Dr. Friedrich Reidt,
ordentlichem Lehrer am Gymnasium zu Hamm.

Zweiter Theil.

Planimetrie.

Berlin,
G. Grote'sche Verlagsbuchhandlung.
1868.

Inhalt des zweiten Theiles.

Seite

Einleitung. § 1—8 1
I. Capitel: Von den Winkeln. § 9—13. 8
Anhang 1: Uebungssätze und Aufgaben. 17
II. Capitel: Von den Seiten und Winkeln der Dreiecke § 14—18 . . 18
III. Capitel: Von den Seiten und Winkeln der Vierecke § 19—20 . . 32
Anhang 2: Congruenz der Vierecke und Polygone 39
IV. Capitel: Von den Linien und Winkeln bei dem Kreise § 21—25 . 41
V. Capitel: Proportionalität gerader Linien und Aehnlichkeit der Figuren § 26—32 59
Anhang 3: Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsstrahlen 74
VI. Capitel: Vom Flächeninhalt der geradlinigen Figuren § 33—38 . 80
Anhang 4: Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes 97
Anhang 5: Die pythagoreischen Dreiecke 99
Anhang 6: Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke und Auflösung von Aufgaben durch Rechnung 100
VII. Capitel: Vom Umfang und Inhalt des Kreises § 39—40 107
Anhang 7: Näherungsweise Rectification und Quadratur des Kreises 116
Anhang 8: Sätze über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks . . 118
Anhang 9: Die harmonische Theilung 124
Anhang 10: Potenzen bei dem Kreise 128
Anhang 11: Das Apollonische Problem für den Kreis 138
Anhang 12: Die Kegelschnitte 147

Abkürzungen.

In den Citaten bedeutet L. „Lehrsatz", A. „Aufgabe".

Grundsätze:

1. Das Ganze ist größer, als jeder seiner Theile.
2. Gleiches, zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.
3. Gleiches, von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.
4. Gleiches, mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.
5. Gleiches, durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.
6. Addirt man gleiche Größen zu ungleichen, so bleibt die größere der letzteren größer, subtrahirt man Gleiches von Ungleichem, so bleibt das Größere größer.
7. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich.

Einleitung.

§ 1. Vorübungen.

Der Würfel ist ein von sechs Flächen begrenzter Körper (obere, untere, vordere, hintere, rechte, linke Fläche). Jede dieser Flächen wird von vier geraden Linien begrenzt, welche die Kanten des Würfels heißen. Der Würfel hat zwölf gleichlange Kanten. Jede derselben wird von zwei Punkten begrenzt; diese letzteren heißen die Ecken des Würfels. An jeder Ecke stoßen drei Kanten zusammen und ebenso drei Flächen. Im Ganzen hat der Würfel acht Ecken.

Die quadratische Säule ist ein Körper, welcher, wie der Würfel, von sechs Flächen begrenzt wird und zwölf Kanten und acht dreiseitige Ecken hat. Die Kanten der Säule sind nicht, wie die des Würfels, von gleicher Länge, vielmehr hat sie acht gleiche Kanten der einen, und vier gleiche einer anderen Art. Die Flächen der Säule sind, wie die des Würfels, Vierecke. Zwei derselben haben gleiche Gestalt mit denen des Würfels und heißen Quadrate, die anderen heißen Rechtecke.

Die regelmäßig-sechsseitige Säule ist ein Körper, welcher von acht Flächen begrenzt wird. Sechs von diesen Flächen sind Vierecke, die beiden anderen sind Sechsecke. Vierecke und Sechsecke sind Figuren; die sie begrenzenden geraden Linien heißen ihre Seiten. Die Seiten des Quadrats sind einander gleich, die eines Rechteckes nur paarweise gleich. — Zwei gerade Linien, die sich in einem Punkte treffen, bilden an demselben einen Winkel. Die Winkel der Quadrate und der Rechtecke sind rechte, die der Sechsecke an der Säule sind schiefe.

Die gerade dreiseitige Pyramide ist ein von vier Flächen begrenzter Körper. Diese Flächen sind Dreiecke. Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel.

Die Walze ist ein von drei Flächen begrenzter Körper, von denen zwei eben sind und die dritte gekrümmt ist. (Die Flächen der vorher genannten Körper waren sämmtlich ebene Flächen.) Jede der ebenen Flächen einer Walze wird von einer krummen Linie begrenzt, welche eine Kreislinie heißt.

Auf jeder Fläche kann man sich beliebig viele Linien gezogen denken. Auf der krummen Fläche der Walze lassen sich nur nach einer Richtung gerade Linien ziehen, nach allen anderen blos krumme. Auf einer ebenen

Fläche dagegen kann man nach allen Richtungen gerade Linien zeichnen. Lassen sich auf einer ebenen Fläche auch krumme Linien ziehen? Sind dieselben immer Kreislinien?

Die Kugel ist ein von einer einzigen krummen Fläche begrenzter Körper. Alle Punkte dieser Fläche sind von einem bestimmten Punkt im Innern gleichweit entfernt. Auf der Kugelfläche kann man keine geraden Linien ziehen.

Anmerkung. Diese Uebungen sind an vorgezeigten Körpermodellen vorzunehmen und können nach Bedürfniß leicht noch beliebig vermehrt und weiter ausgedehnt werden.

§ 2. Grundbegriffe.

Ein Körper ist ein ringsum begrenzter Raum. Eine Fläche ist die Grenze eines Körpers, eine Linie ist die Grenze einer Fläche, ein Punkt ist die Grenze einer Linie. Flächen können nur an Körpern, Linien an Flächen oder Körpern, Punkte an Linien, Flächen oder Körpern vorkommen.

Ein Punkt hat keine Ausdehnung, eine Linie hat Ausdehnung nach einer Dimension, der Länge. Eine Fläche hat auch Ausdehnung zu beiden Seiten jeder in ihr liegenden Linie, oder dieselbe ist nach zwei Dimensionen, Länge und Breite, ausgedehnt. Ein Körper ist auch zu beiden Seiten jeder in ihm liegenden Fläche ausgedehnt; derselbe hat noch eine dritte Dimension, die Höhe (Tiefe, Dicke). Welche Dimension fehlt also der Fläche, welche fehlen der Linie, dem Punkte? Was entsteht durch Aneinanderreihen von Punkten, durch Aneinanderlegen von Linien, durch Aufeinanderlegen von Flächen?

Bewegt sich ein Punkt, so ist der von ihm durchlaufene Weg eine Linie. Man sagt, der Punkt beschreibe diese Linie. Was beschreibt eine sich bewegende Linie, was eine bewegte Fläche? (Beispiele, in welchen eine bewegte Linie wieder eine Linie, eine bewegte Fläche wieder eine Fläche beschreibt.)

Durch jeden Körper kann man sich beliebig viele Flächen gelegt denken. Jede derselben theilt den Körper in zwei Theile. Diese sind wieder Körper und wieder theilbar. Man kann diese Theilung so oft wiederholen, als man will. Macht man die Theile immer dünner, so entsteht doch nie eine Fläche. Warum nicht? Sind Flächen theilbar, und wodurch? Wie viel Linien kann man in einer Fläche gezogen denken? Was für Gebilde sind die Theile einer Fläche? Sind sie wieder theilbar? Wie oft kann man die Theilung wiederholen? Kann man auf diese Weise eine Linie erhalten? Beantworte dieselben Fragen für Linien! Ist ein Punkt theilbar? Warum nicht? — Körper, Flächen und Linien sind stetige (continuirliche) Größen.

Man theilt die Linien ein in gerade und krumme. Eine krumme Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes, der seine Richtung beständig ändert. Eine krumme Linie ist also eine solche, welche nirgends gerade ist*).

*) Der Begriff der geraden Linie ist nicht definirbar; er wird als gegeben vorausgesetzt. Der Begriff der Richtung setzt den der Geraden voraus.

Eine gebrochene Linie ist eine aus mehreren geraden von verschiedenen Richtungen, eine gemischte eine aus geraden und krummen zusammengesetzte Linie.

Aufgabe. Zu zeichnen a) eine gerade Linie (mittelst des Lineals), b) eine krumme, c) eine gebrochene, d) eine gemischte Linie.

(Die Zeichnungen sind in einem besonderen Zeichenhefte genau und sauber auszuführen.)

Man theilt die Flächen ein in ebene und krumme Flächen. Eine ebene Fläche, oder eine Ebene, ist eine solche Fläche, in welcher man nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann*); eine krumme Fläche ist eine solche, von der kein Theil eben ist.

Die Geometrie handelt von den Körpern, Flächen, Linien und Punkten. Sie hat zwei Theile, die ebene Geometrie oder Planimetrie, und die körperliche Geometrie oder Stereometrie. Die erstere handelt nur von solchen Punkten, Linien und Flächen, welche alle in einer und derselben Ebene liegen.

§ 3. Die gerade Linie.

Eine gerade Linie, auch schlechthin eine Gerade genannt, wird durch zwei (große lateinische) Buchstaben bezeichnet, welche man an zwei Punkte derselben setzt, z. B. die Linie AB.

Im Folgenden soll, wenn von einer Linie die Rede ist, ohne daß dabei gesagt ist, daß dieselbe eine krumme oder zusammengesetzte sei, darunter immer eine Gerade verstanden werden.

Jede gerade Linie kann von einem Punkte auf zwei Arten durchlaufen werden, nämlich sowohl in der Richtung von A nach B, als in der Richtung von B nach A. Eine Gerade hat also zwei Richtungen; dieselben sind einander entgegengesetzt.

Ein Punkt, welcher eine gerade Linie beschreibt, kann nach beiden Richtungen ohne Ende fortgehend, oder jede gerade Linie kann nach beiden Richtungen hin unendlich lang gedacht werden. Sie kann ferner blos nach einer Richtung ins Unendliche fortgehen, während sie nach der anderen durch einen Punkt begrenzt wird (Strahl), oder sie kann nach beiden Richtungen begrenzt sein (Strecke). Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade hat eine bestimmte Länge, sie giebt die Entfernung oder den Abstand der beiden Punkte an. Man bezeichnet dieselbe meist durch zwei an ihre Endpunkte gesetzte Buchstaben. Im Folgenden ist überall, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist, unter einer Geraden eine solche zu verstehen, welche nach beiden Richtungen hin eine unbestimmte Länge hat.

Außer der Länge einer Geraden kommt auch ihre Lage in Betracht. In Betreff derselben gelten folgende Sätze:

Durch einen Punkt einer Ebene lassen sich unzählig viele Gerade ziehen; dieselben haben verschiedene Richtungen. Der Unterschied der

*) Daß es solche Flächen giebt, wird hier als Erfahrungssatz angenommen.

Richtungen zweier von einem gemeinschaftlichen Punkt ausgehenden Geraden heißt der Winkel dieser Geraden. Durch zwei Punkte läßt sich dagegen nur eine Gerade ziehen, oder durch zwei Punkte ist die Lage einer Geraden bestimmt. Sind diese Punkte zugleich die Endpunkte, so bestimmen sie die Lage und die Länge der Linie zugleich.

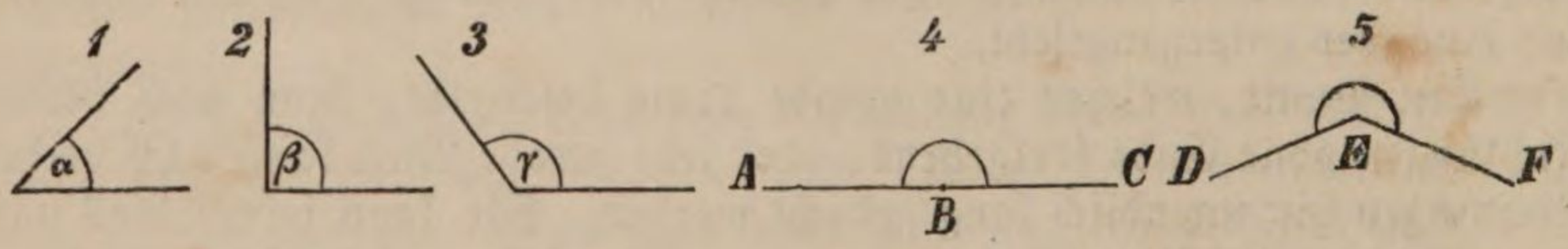
Daher müssen zwei gerade Linien, welche durch dieselben zwei Punkte gezogen werden, ihrer ganzen Länge nach aufeinander fallen (sich decken), und zwei gerade Linien, welche zum Theil aufeinander liegen, fallen ihrer ganzen Länge nach zusammen.

§ 4. Die Winkel.

Die beiden Geraden, welche mit einander einen Winkel bilden, heißen die Schenkel, ihr gemeinschaftlicher Punkt heißt der Scheitel des Winkels. Man erhält eine Vorstellung von der Größe eines Winkels, wenn man sich einen der beiden Schenkel um den Scheitelpunkt gedreht denkt, bis er mit dem anderen zusammenfällt; je größer die Drehung, desto größer ist der Winkel und umgekehrt.

Fragen: Wie lang müssen die beiden Schenkel eines Winkels sein? Wie ändert sich die Größe eines Winkels, wenn man den einen Schenkel verlängert oder verkürzt, wie, wenn dies mit beiden Schenkeln geschieht? Müssen die Schenkel gleich lang sein?

Man theilt die Winkel ein in gestreckte, hohle und überstumpfe. Ein gestreckter Winkel (Fig. 4) ist ein solcher, dessen Schenkel in entgegengesetzten Richtungen eine gerade Linie bilden, ein hohler (concaver) ist ein solcher, welcher kleiner als ein gestreckter, ein überstumpfer (convexer) ein solcher, welcher größer als ein gestreckter ist (Fig 5). Die hohlen Winkel werden wieder in rechte, spitze und stumpfe eingetheilt. Ein rechter



Winkel (Fig. 2) ist ein solcher, welcher halb so groß als ein gestreckter, ein spitzer (Fig. 1) ist ein solcher, welcher kleiner als ein rechter und ein stumpfer (Fig. 3) heißt ein hohler Winkel, welcher größer als ein rechter ist. Spitze und stumpfe Winkel führen den gemeinschaftlichen Namen schiefe Winkel.

Aufgabe: Zeichne zu jeder Art von Winkeln ein Beispiel ins Heft (den rechten mittelst des rechtwinkeligen Lineals).

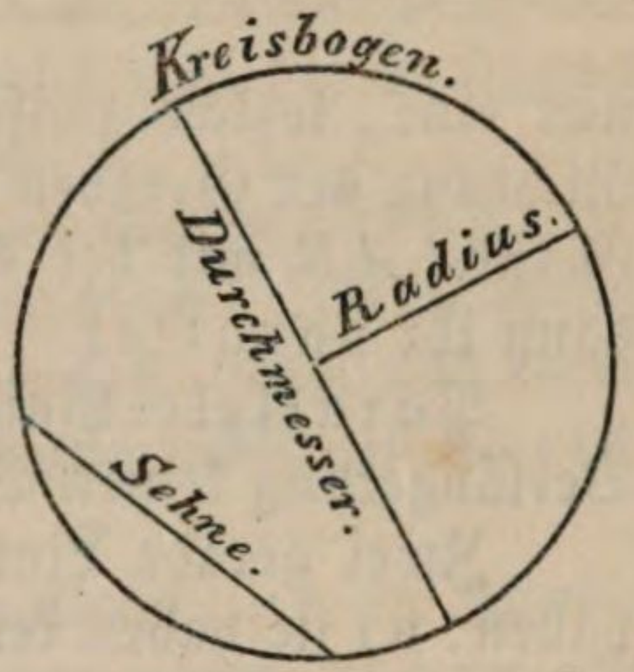
Anmerkung: Die Bezeichnung der Winkel geschieht durch einen kleinen griechischen Buchstaben innerhalb des Winkels am Scheitel, oder durch drei große lateinische Buchstaben. Wie schreibt und liest man die letzteren? Zwei von einem Punkte auslaufende Linien bilden immer zwei Winkel mit einander, entweder zwei gestreckte oder einen hohlen und einen überstumpfen. Im letzteren Fall wird, wenn nicht das Gegentheil gesagt ist, immer der hohle gemeint.

Denkt man sich, eine Gerade drehe sich um einen ihrer Punkte, so daß sie nach und nach mit jeder der Geraden zusammenfällt, welche durch diesen Punkt gezogen werden können, und zuletzt wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so bildet sie mit dieser ursprünglichen Lage nach und nach Winkel von allen möglichen Größen. Der rechte Winkel entspricht dem vierten Theile, der gestreckte der Hälfte einer ganzen Umdrehung.

Bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt der Geraden eine krumme Linie, welche eine Kreislinie genannt wird.

§ 5. Die Kreislinie.

Eine Kreislinie ist eine krumme Linie, welche in sich selbst zurückkehrt, und die Eigenschaft hat, daß jeder ihrer Punkte von einem bestimmten Punkte im Innern gleichweit entfernt ist. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt (das Centrum), jede Gerade, welche vom Mittelpunkt bis zu einem Punkte der Kreislinie geht, heißt ein Halbmesser oder Radius, jede Gerade, welche zwei Punkte der Kreislinie verbindet, eine Sehne, und wenn sie durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser. Jeder Theil einer Kreislinie heißt ein Kreisbogen oder ein Bogen schlechthin. Aus der Erklärung der Kreislinie folgt der Satz: Alle Radien eines Kreises sind gleich.



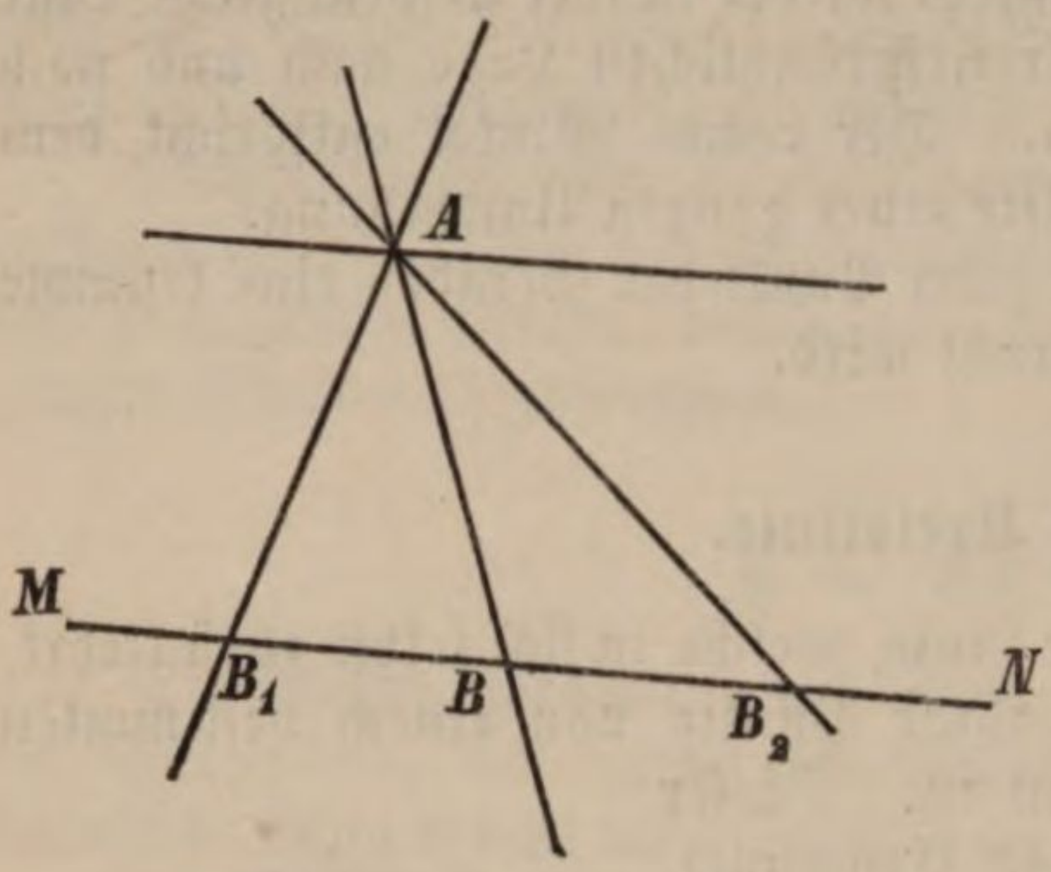
Anwendung der Kreislinien, um gerade Linien von gegebenen Längen zu zeichnen. Gebrauch des Zirkels.

Aufgaben: 1) Eine Kreislinie zu zeichnen a) beliebig, b) mit gegebenem Radius, c) um einen gegebenen Punkt. 2) Eine gerade Linie zu zeichnen, welche einer gegebenen Geraden an Länge gleich ist. 3) Eine gegebene Strecke über einen ihrer Endpunkte um eine andere gegebene Strecke zu verlängern. 4) Eine Strecke zu zeichnen, welche gleich der Summe $(a + b)$ zweier gegebenen Strecken (a, b) ist. 5) Desgleichen eine solche, welche gleich dem Unterschied $(a - b)$ derselben ist. 6) a, b, c seien gegebene Strecken; man soll andere Strecken zeichnen, welche beziehungsweise gleich $a + b + c$, $a + b - c$, $a - b - c$ sind. 7) Eine Strecke zu zeichnen, welche doppelt so groß ist, als eine gegebene. 8) Desgleichen eine, welche 3, 4, 5mal so groß, als eine gegebene ist. 9) In einer gegebenen Kreislinie einen Radius zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht (3 Fälle). 10) Zu einer gegebenen Kreislinie einen Durchmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht. 11) Desgl. eine Sehne, von der zwei Punkte gegeben sind. 12) In eine gegebene Kreislinie eine Sehne von gegebener Länge einzutragen. 13) Eine Kreislinie mit gegebenem Radius zu zeichnen, die durch einen gegebenen Punkt geht.

§ 6. Parallele Gerade.

Denkt man sich, wie vorhin, eine Gerade AB, welche sich um einen ihrer Punkte A so dreht, daß sie nach und nach die Lagen aller durch A

möglichen Geraden erreicht, denkt man sich ferner eine zweite Gerade MN, welche mit der Geraden AB einen Punkt B gemeinschaftlich hat, so wird



dieser gemeinschaftliche Punkt bei der Drehung von AB nach und nach die Lage aller von B in der einen Richtung BM der Geraden MN liegenden Punkte B_1 u. s. w. annehmen, dann nach der entgegengesetzten Richtung überspringen und auch hier alle Punkte B_2 u. s. w. von MN durchlaufen, bis er nach einer vollständigen Umdrehung von AB wieder seine alte Lage B erreicht. Unter allen den verschiedenen Lagen von AB befindet sich nur eine, welche zwischen dem Uebergang des Punktes B von der einen Richtung der Geraden MN nach der anderen liegt. In dieser Lage hat die Gerade AB mit der Geraden MN keinen Punkt gemeinsam, und heißt dann ihr parallel.

Parallele Linien sind solche Linien, welche auch bei unendlicher Verlängerung keinen Punkt mit einander gemeinsam haben.

Zwei gerade Linien können mithin folgende Lagen gegen einander haben: a) sie haben keinen Punkt gemeinsam, oder sie sind parallel; b) sie haben einen Punkt gemeinsam, oder sie schneiden sich. Der gemeinschaftliche Punkt heißt der Durchschnittspunkt; c) sie haben zwei Punkte gemeinsam, und dann decken sie sich.

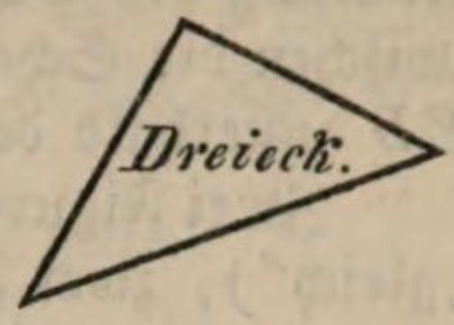
Grundsatz: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden läßt sich zu dieser nur eine Parallele legen.

§ 7. Figuren.

Eine ringsum begrenzte Ebene heißt eine Figur. Man unterscheidet geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren, je nachdem dieselben nur von geraden, oder nur von einer oder mehreren krummen, oder von beiden Arten von Linien zugleich begrenzt werden.

Die Linien, welche eine geradlinige Figur begrenzen, heißen ihre Seiten. Die Gesammtheit der Seiten bildet den Umfang der Figur. Mit zwei geraden Linien läßt sich keine Figur begrenzen; man bedarf dazu vielmehr mindestens dreier Linien. Man erhält eine dreiseitige Figur, wenn man drei nicht in gerader Linie liegende Punkte zu je zweien durch gerade Linien verbindet. Auf ähnliche Weise kann man mit Hülfe von vier oder mehr Punkten eine vier- oder mehrseitige Figur zeichnen. Eine dreiseitige ebene Figur heißt ein Dreieck, eine vierseitige ein Viereck, eine fünfseitige ein Fünfeck u. s. w. Geradlinige Figuren mit mehr als vier Seiten heißen auch Vielecke oder Polygone (*πολὺς, γόνυ*). Die Punkte, in welchen sich die Seiten einer Figur treffen, heißen ihre Eckpunkte. Je zwei Seiten bilden mit einander an dem ihnen gemeinschaftlichen Eckpunkt

einen Winkel der Figur. Jede Figur hat ebensoviele Eckpunkte und ebensoviele Winkel als Seiten. Ein Außenwinkel ist ein Winkel, welchen eine Seite einer geradlinigen Figur mit der Verlängerung einer ihr anliegenden Seite über den beiden gemeinschaftlichen Eckpunkt bildet. — Wieviel Außenwinkel kann man an jedem Eckpunkt einer Figur zeichnen? Wieviel hat dieselbe im Ganzen?



Eine Diagonale ist eine gerade Linie, welche zwei Eckpunkte einer Figur verbindet, ohne mit einer Seite zusammenzufallen. Transversale heißt jede gerade Linie, welche Seiten einer Figur oder deren Verlängerungen schneidet. Eine jede Transversale, welche durch einen Punkt im Innern der Figur geht, muß den Umfang derselben in wenigstens zwei Punkten schneiden. Warum?

Die einfachste krummlinige Figur ist eine solche, welche von einer Kreislinie begrenzt wird. Dieselbe heißt ein Kreis und die sie begrenzende Kreislinie heißt die Peripherie des Kreises.

Eine Figur, welche von einem Bogen und einer Sehne eines Kreises begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment. Ist die Sehne ein Durchmesser, so heißt das Segment ein Halbkreis. Eine von einem Bogen und zwei Radien eines Kreises begrenzte Figur heißt ein Kreisausschnitt oder Sector.

Aufgaben: 1) Zeichne a) ein Dreieck, b) ein Viereck, c) ein Fünfeck. 2) Zeichne an jedem Eckpunkt jeder dieser drei Figuren einen Außenwinkel. 3) Zeichne die sämmtlichen Diagonalen des Vierecks und des Fünfecks. 4) Zeichne a) einen Halbkreis, b) ein Segment, c) einen Sector. 5) Wieviel Diagonalen hat ein Dreieck, wieviel ein Viereck, ein Fünfeck, ein Sechseck?

Anmerkung: Verbindet man eine Anzahl gegebener Punkte auf irgend eine Weise so mit einander, daß eine einzige gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie entsteht, so erhält man eine Figur. Wir setzen aber hier und im Folgenden voraus, daß der Umfang derselben sich nicht selbst schneide.

§ 8. Vergleichung der Größe verschiedener Linien, Winkel und Figuren.

Ob zwei gegebene Strecken AB, CD gleiche Länge haben, oder nicht, erkennt man, indem man die eine so auf die andere gelegt denkt, daß ihr Endpunkt C auf dem Endpunkt A und sie selbst in der Richtung von AB liegt. Fällt dann D auf B, so ist CD gleich AB, fällt D zwischen A und B, so ist CD kleiner als AB, fällt endlich D auf die Verlängerung von AB, so ist CD größer als AB. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$, das der Ungleichheit $>$ oder $<$, wobei die Oeffnung der Figur dem Größeren zugekehrt ist. Die drei oben genannten Fälle lassen sich also, wie folgt, schreiben: $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$.

Ob zwei Winkel ABC und DEF gleich oder ungleich sind, erkennt man, indem man sich den einen so auf den anderen gelegt denkt, daß sein Scheitel E auf den Scheitel B und sein Schenkel EF in die Richtung des

Schenkels BC des anderen fällt, beide Winkel aber auf derselben Seite des gemeinschaftlichen Schenkels liegen. Fällt dann der Schenkel ED in die Richtung des Schenkels BA, so ist der Winkel $DEF = ABC$; fällt ED zwischen die Schenkel BA und BC, so ist $\sphericalangle DEF < ABC$; fällt endlich ED außerhalb des Winkels ABC, so ist $DEF > ABC$.

Zwei Figuren, welche gleiche Größe haben, heißen inhaltsgleich (oder „gleich"), zwei Figuren, welche gleiche Gestalt haben, heißen ähnlich, Figuren, die gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, heißen congruent. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\backsim$, das der Congruenz $\overline{\backsim}$.

Frage: Kann ein Viereck einem Dreieck gleich sein? Kann es ihm ähnlich sein?

Congruente Figuren kann man so aufeinander gelegt denken, daß sie sich vollständig decken, und Figuren, die man in dieser Weise aufeinander gelegt denken kann, sind congruent. Bei geradlinigen Figuren findet dieses statt, wenn je zwei homologe, d. h. an entsprechenden Stellen liegende Seiten und je zwei homologe Winkel derselben gleich sind.

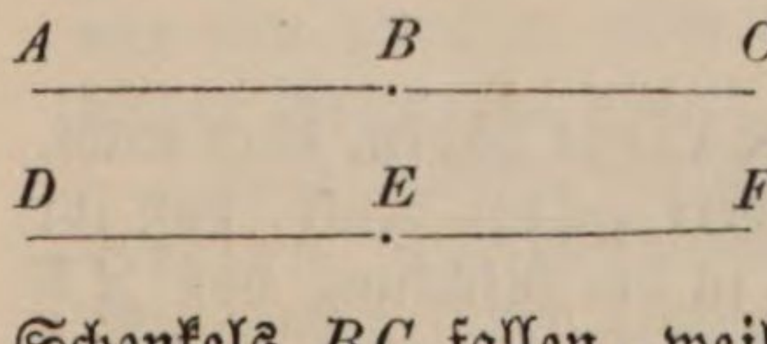
Anmerkung: Gerade Linien und ebenso Winkel, welche gleiche Größe haben, sind stets congruent, denn ihre Gestalt ist immer gleich.

I. Capitel.

Von den Winkeln.

§ 9. Gestreckte und rechte Winkel.

Lehrsatz 1. Alle gestreckten Winkel sind gleich.
Voraussetzung: ABC und DEF bilden gerade Linien.
Behauptung: $\sphericalangle ABC = DEF$.



Beweis. Denkt man sich den Winkel DEF so auf den Winkel ABC gelegt, daß der Scheitel E auf den Scheitel B und der Schenkel ED in die Richtung des Schenkels BA fällt, so muß auch der Schenkel EF in die Richtung des Schenkels BC fallen, weil ABC und DEF nach Voraussetzung gerade Linien sind und gerade Linien, welche zum Theil aufeinander liegen, ihrer ganzen Länge nach zusammenfallen. Also deckt der Winkel DEF dann den Winkel ABC und ist ihm mithin gleich.

Zusatz: Alle rechten Winkel sind gleich.

Erklärung: Der 90. Theil eines rechten Winkels heißt ein Grad, der 60. Theil eines Grades eine Minute, der 60. Theil einer Minute eine Secunde. Da alle rechten Winkel gleich sind, so haben auch der Grad, die Minute, die Secunde genau bestimmte, unveränderliche Werthe.

Sie dienen dazu, die Größe eines Winkels in Zahlen auszudrücken (ihn zu messen), indem man angiebt, wieviel Grade, beziehungsweise Minuten und Secunden derselbe enthält, z. B. 5 Grad, 6 Minuten und 17 Secunden, oder in Zeichen: $5^0\ 6'\ 17''$. — Wieviel Grad hat ein gestreckter Winkel?

Frage: Sind auch alle spitzen oder alle stumpfen Winkel gleich?

§ 10. Nebenwinkel, Scheitelwinkel.

Erklärung: Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel, so entsteht ein zweiter Winkel, welcher der Nebenwinkel des ersteren heißt. Verlängert man beide Schenkel über den Scheitel, so heißt der von den Verlängerungen gebildete Winkel der Scheitelwinkel des ersteren.

Nebenwinkel sind solche Winkel, welche den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam haben und deren andere Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen eine Gerade bilden.

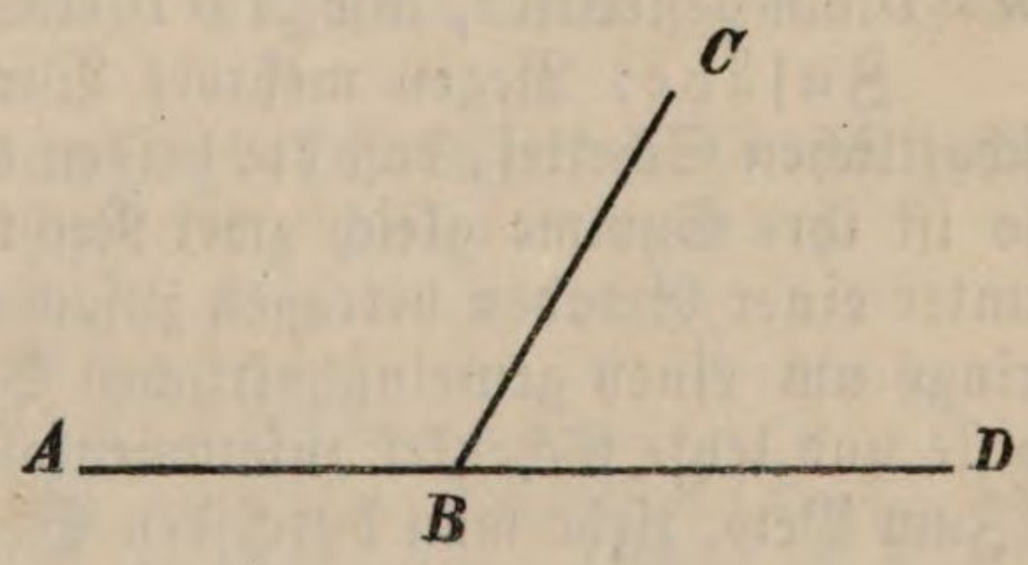
Scheitelwinkel sind solche Winkel, welche den Scheitel gemeinsam haben und bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen über den Scheitel sind.

Frage: Wieviel Paar Nebenwinkel und wieviel Paar Scheitelwinkel entstehen, wenn zwei gerade Linien sich schneiden?

Lehrsatz 2. Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte.

Voraussetzung: ABD eine Gerade.

Behauptung: $\sphericalangle ABC + CBD = 2R$.



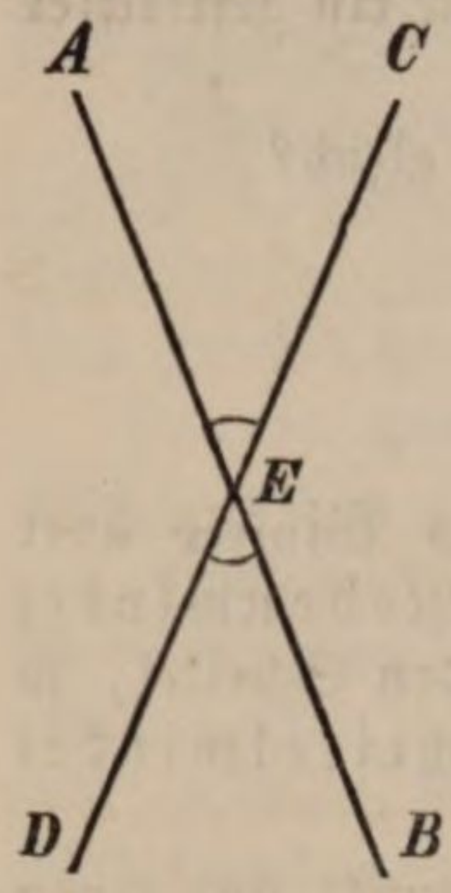
Beweis: Die Winkel ABC und CBD bilden zusammen den Winkel ABD, welcher zufolge der Voraussetzung ein gestreckter oder gleich zwei Rechten ist.

Fragen: Zwei Nebenwinkel seien gleich groß, wie groß ist jeder? Zu welcher Art von Winkeln gehört der größere, zu welcher der kleinere von zwei ungleichen Nebenwinkeln? Was kann man von den Nebenwinkeln zweier gleichen Winkel behaupten? Welcher von zwei ungleichen Winkeln hat den größeren Nebenwinkel? Was weiß man von zwei Winkeln, deren Nebenwinkel gleich sind, was von Winkeln, deren Nebenwinkel ungleich sind?

Aufgaben: 1. Ein Winkel α sei in Graden, beziehungsweise Minuten und Secunden gegeben; man soll seinen Nebenwinkel berechnen. Beispiele: 1) $\alpha = 105^0$. 2) $72^0\ 16'$. 3) $35^0\ 12'\ 4''$. 4) 179^0. 5) $90^0\ 59'$.

2. Zu einem gegebenen Winkel den Nebenwinkel zu zeichnen. — Auf wieviele Arten läßt sich diese Aufgabe lösen? Wieviele Nebenwinkel hat also ein gegebener Winkel?

Lehrsatz 3. Scheitelwinkel sind gleich.
Voraussetzung: AEB und CED sind gerade Linien.
Behauptung: $\sphericalangle AEC = BED$.



Beweis: $\sphericalangle AEC + CEB = 2\ R$ (L. 2),
$\sphericalangle BED + CEB = 2\ R$ (L. 2),
also ist $\sphericalangle AEC + CEB = BED + CEB$. Subtrahirt man von diesen beiden Summen den ihnen gemeinschaftlichen Winkel CEB, so erhält man $\sphericalangle AEC = BED$.

Erklärung: Einen Satz umkehren, heißt einen neuen Satz bilden, indem man die Behauptung des ersteren zur Voraussetzung und die Voraussetzung des ersteren zur Behauptung macht. (Z. B. Wenn Schnee fällt — so ist es Winter. Umkehrung: Wenn es Winter ist — fällt Schnee.)

Die Umkehrung eines richtigen Satzes ist nicht nothwendig wieder richtig, sondern bedarf eines besonderen Beweises. (Z. B. Wenn Ferien sind — ist keine Schule. Die Umkehrung: Wenn keine Schule ist, sind Ferien, ist falsch. Warum?)

Lehrsatz 4 (Umkehrung von L. 2). Wenn zwei Winkel zusammen zwei Rechte betragen, einen gemeinschaftlichen Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels liegen, so bilden ihre anderen Schenkel eine gerade Linie.

Voraussetzung: $\sphericalangle ABC + CBD = 2\ R$. (Fig. siehe Lehrs. 2.)
Behauptung: ABD ist eine Gerade.
Beweis: $\sphericalangle ABC + CBD = \sphericalangle ABD$, daher ist der Winkel ABD ein gestreckter, also ABD eine Gerade.

Zusätze: Liegen mehrere Winkel so aneinander um einen gemeinschaftlichen Scheitel, daß die beiden äußersten Schenkel eine Gerade bilden, so ist ihre Summe gleich zwei Rechten. (Kürzer: Die Winkel über oder unter einer Geraden betragen zusammen zwei Rechte.) — Winkel, welche rings um einen gemeinschaftlichen Scheitel so aneinander liegen, daß der erste und letzte Schenkel zusammenfallen, betragen zusammen vier Rechte. (Zum Bew. ziehe man durch den Scheitel eine beliebige Gerade.)

§ 11. Verbindung dreier Geraden.

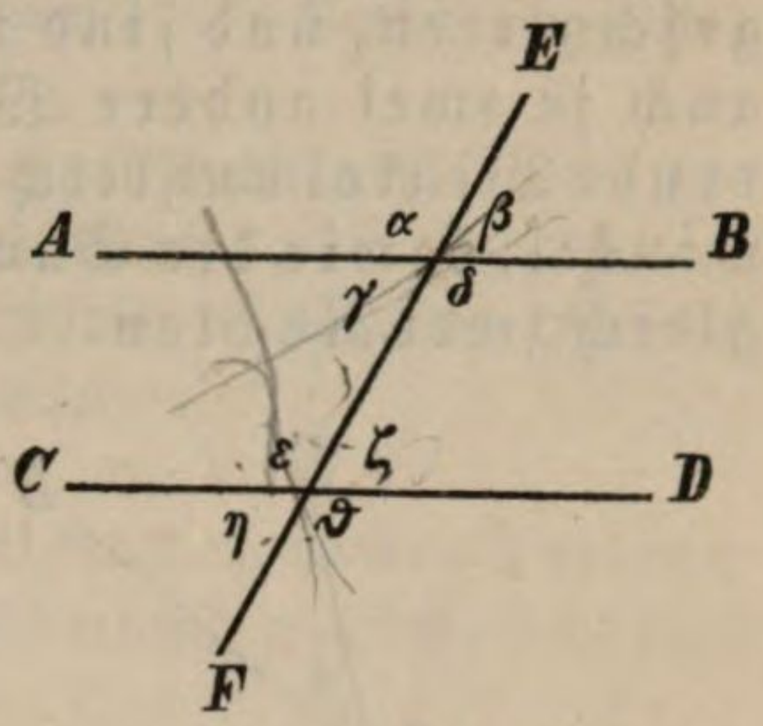
Vorbemerkung: Werden zwei gerade Linien von einer dritten Geraden geschnitten, so entstehen acht hohle Winkel. Vier derselben liegen zwischen den geschnittenen Linien und heißen innere Winkel, die vier anderen werden äußere genannt. Man kann ferner vier Winkel auf der einen und vier auf der anderen Seite der schneidenden Geraden unterscheiden.

Wieviel beträgt die Summe aller acht, wieviel die der äußeren, wieviel die der inneren Winkel, wieviel die der Winkel auf der einen und wieviel die der Winkel auf der anderen Seite der schneidenden Geraden und warum?

Verbindet man zwei von den acht Winkeln zu einem Paar, so erhält man, wenn beide an demselben Scheitelpunkt liegen, entweder Nebenwinkel oder

Scheitelwinkel, liegen aber die beiden Winkel eines Paares an verschiedenen Scheitelpunkten, so erhalten sie neue Namen.

Erklärung: Zwei Winkel, von denen der eine ein äußerer, der andere ein innerer ist, heißen, wenn beide auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen (z. B. α und ε), correspondirende Winkel, liegen sie aber auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie (z. B. α, ζ), so mögen sie conjugirte Winkel genannt werden. Sind dagegen zwei Winkel entweder zugleich äußere, oder zugleich innere, so heißen sie, falls sie auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen (α, η), Gegenwinkel, falls sie diese Seite wechseln (α, ϑ), Wechselwinkel.



Innere Wechselwinkel, äußere Wechselwinkel, innere oder äußere Gegenwinkel.

Fragen und Aufgaben: Wie viel Paare Wechselwinkel sind in der vorstehenden Figur und wie heißen sie? — Beantworte dieselbe Frage für jede der drei anderen Arten von Winkelpaaren. — Stelle jeden der acht Winkel mit jedem der sieben anderen zusammen und gieb die Benennung zu jedem der erhaltenen 28 Paare an.

Lehrsatz 5: Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind zwei Wechselwinkel einander gleich, so sind auch

1) je zwei andere Wechselwinkel gleich,
2) je zwei correspondirende Winkel gleich,
3) ist die Summe je zweier Gegenwinkel gleich zwei Rechten, und
4) die Summe je zweier conjugirter Winkel gleich zwei Rechten.

Voraussetzung: $\measuredangle \alpha = \vartheta$.

Behauptung 1: $\beta = \eta$, $\gamma = \zeta$, $\delta = \varepsilon$.

Beweis: $\beta + \alpha = 2\,R$ (L. 2), und $\eta + \vartheta = 2\,R$ (L. 2), also ist $\beta + \alpha = \eta + \vartheta$, und da $\alpha = \vartheta$, so ist $\beta = \eta$. Ferner ist $\gamma + \alpha = \zeta + \vartheta = 2\,R$, also, da $\alpha = \vartheta$ ist, auch $\gamma = \zeta$; ferner $\delta = \alpha$ (L. 3), $\varepsilon = \vartheta$ (L. 3), also auch $\delta = \varepsilon$.

Behauptung 2: $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \zeta$, $\gamma = \eta$, $\delta = \vartheta$.

Beweis: $\alpha = \vartheta$ nach Vor., $\vartheta = \varepsilon$ (L. 3), also ist auch $\alpha = \varepsilon$. $\alpha = \vartheta$ nach Vor., $\beta + \alpha = 2\,R$, $\zeta + \vartheta = 2\,R$, also $\beta + \alpha = \zeta + \vartheta$, daher ist auch $\beta = \zeta$.

Man führe den Beweis in ähnlicher Art für die anderen Fälle durch.

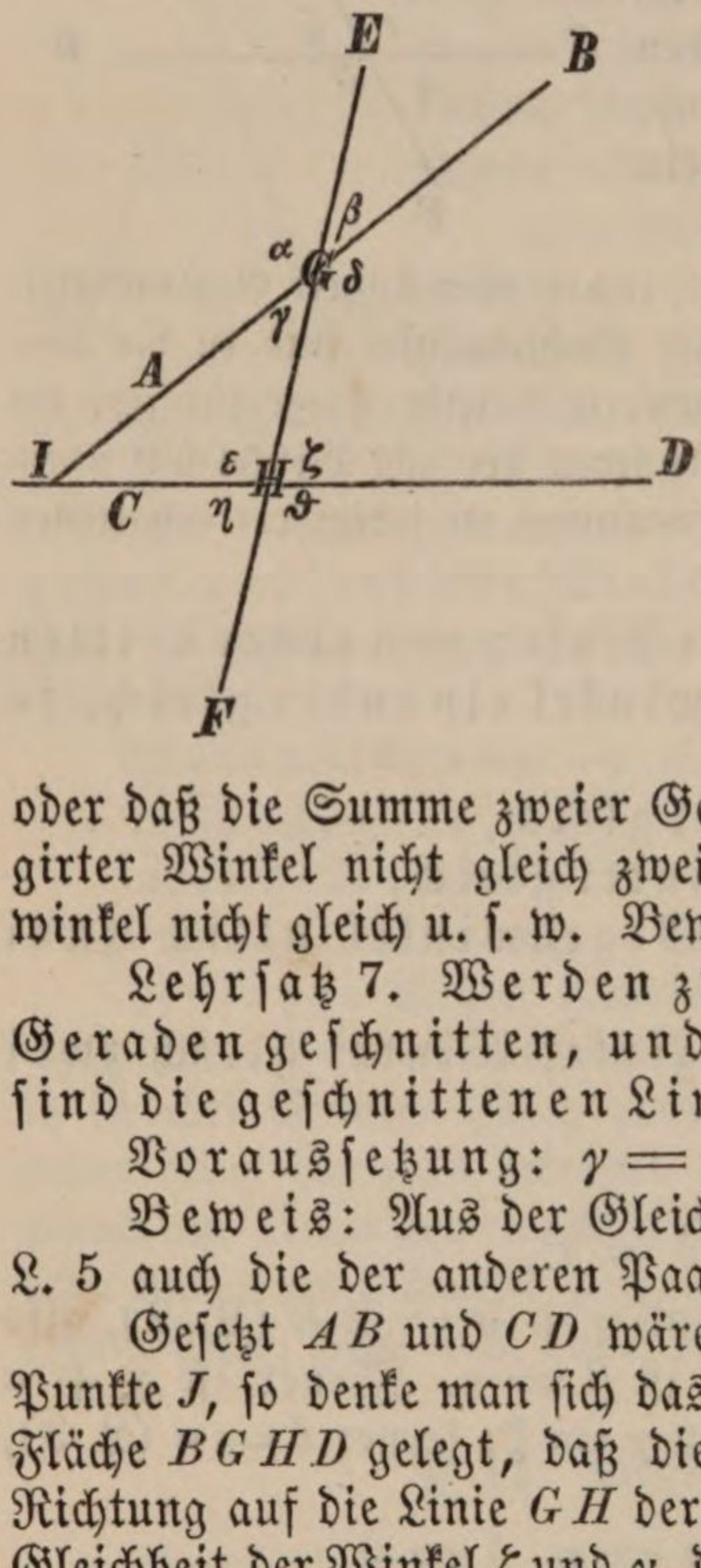
Behauptung 3: $\alpha + \eta = 2\,R$, $\beta + \vartheta = 2\,R$ u. s. w.

Beweis: $\alpha = \vartheta$ nach Vor., $\vartheta + \eta = 2\,R$, also ist auch $\alpha + \eta = 2\,R$ u. s. w. Der vierte Theil der Behauptung wird in ähnlicher Art bewiesen.

Zusatz: Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, daß zwei correspondirende Winkel gleich sind, oder so, daß zwei Gegen-

winkel, oder zwei conjugirte Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so sind auch je zwei Wechselwinkel gleich, und alle noch übrigen Behauptungen des Lehrsatzes 5 sind ebenfalls erfüllt. Beweise ähnlich, wie vorher*).

Lehrsatz 6. Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind zwei Wechselwinkel nicht gleich, so sind auch je zwei andere Wechselwinkel und je zwei correspondirende Winkel ungleich, und es ist die Summe je zweier Gegenwinkel, sowie die Summe je zweier conjugirter Winkel nicht gleich zwei Rechten.



Voraussetzung: $\alpha \gtrless \vartheta$.

Behauptung 1: $\beta \lessgtr \eta$, $\delta \gtrless \varepsilon$, $\gamma \lessgtr \zeta$.

Beweis: $\alpha + \beta = 2\ R$ (L. 2), $\vartheta + \eta = 2\ R$ (L. 2), also $\alpha + \beta = \vartheta + \eta$. Da nun nach Vor. $\alpha \gtrless \vartheta$ ist, so muß $\beta \lessgtr \eta$ sein (Grundsatz 3). Ferner ist $\delta = \alpha$ (L. 3), $\varepsilon = \vartheta$ (L. 3), also, da $\alpha \gtrless \vartheta$, so ist auch $\delta \gtrless \varepsilon$.

In ähnlicher Art führe man die Beweise für das noch übrige Winkelpaar und die übrigen Theile der Behauptung einzeln durch.

Zusatz: Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so daß zwei correspondirende Winkel nicht gleich sind, oder daß die Summe zweier Gegenwinkel oder die Summe zweier conjugirter Winkel nicht gleich zwei Rechten ist, so sind auch je zwei Wechselwinkel nicht gleich u. s. w. Beweise ähnlich, wie vorher.

Lehrsatz 7. Werden zwei gerade Linien von einer dritten Geraden geschnitten, und sind zwei Wechselwinkel gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel. (Siehe Fig. Lehrs. 6).

Voraussetzung: $\gamma = \zeta$. Behauptung. $AB \parallel CD$.

Beweis: Aus der Gleichheit eines Paares Wechselwinkel folgt nach L. 5 auch die der anderen Paare, es ist daher sowohl $\gamma = \zeta$, als $\delta = \varepsilon$.

Gesetzt AB und CD wären nicht parallel, schnitten sich also in einem Punkte J, so denke man sich das dann entstehende Dreieck GHJ so auf die Fläche $BGHD$ gelegt, daß die Linie GH des Dreiecks mit umgekehrter Richtung auf die Linie GH der letzteren Fläche fällt. Dann folgt aus der Gleichheit der Winkel ζ und γ, daß GH in der Richtung von HD, und aus der Gleichheit der Winkel ε und δ, daß HC in die Richtung von GB fällt. Daher müßten in diesem Falle auch die Linien GB und HD einen gemeinsamen Punkt K haben, mit welchem J zusammenfallen würde, oder die ursprünglichen Geraden AB und CD müßten sich, außer in J, noch in einem zweiten Punkte K schneiden, was (§ 3) unmöglich ist. Also muß AB parallel zu CD sein.

---

*) Der Anfänger führe die Beweise der einzelnen Behauptungen in zusammenhängendem Satzbau aus. Man thut wohl, den Lehrsatz 5 in vier einzelne Sätze zu zerlegen und ähnlich auch mit dem Zusatz zu verfahren.

Anmerkung: Unter einem indirecten Beweis versteht man einen solchen, bei welchem nachgewiesen wird, daß alle Fälle, welche stattfinden könnten, wenn die Behauptung falsch wäre, nicht möglich sind, weil sie der Voraussetzung widersprechen.

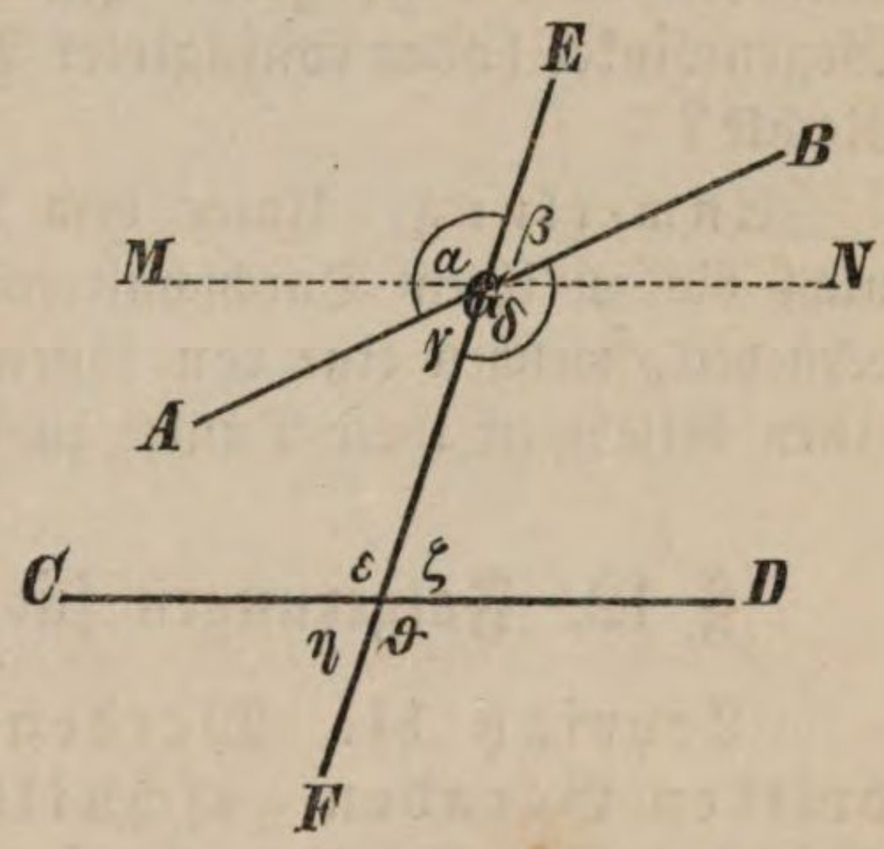
Indirecte Beweise werden in der Geometrie häufig bei Umkehrungssätzen angewendet.

Zusatz: Werden zwei gerade Linien von einer dritten Geraden geschnitten und sind zwei correspondirende Winkel gleich, oder beträgt die Summe zweier Gegenwinkel, oder die Summe zweier conjugirter Winkel zwei Rechte, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Beweis: Lehrs. 5, Zus., Lehrs. 7.

Lehrsatz 8. Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind zwei Wechselwinkel nicht gleich, so sind die geschnittenen Linien nicht parallel.

Voraussetzung: $\gamma \gtrless \xi$. Behauptung: AB nicht parallel CD.

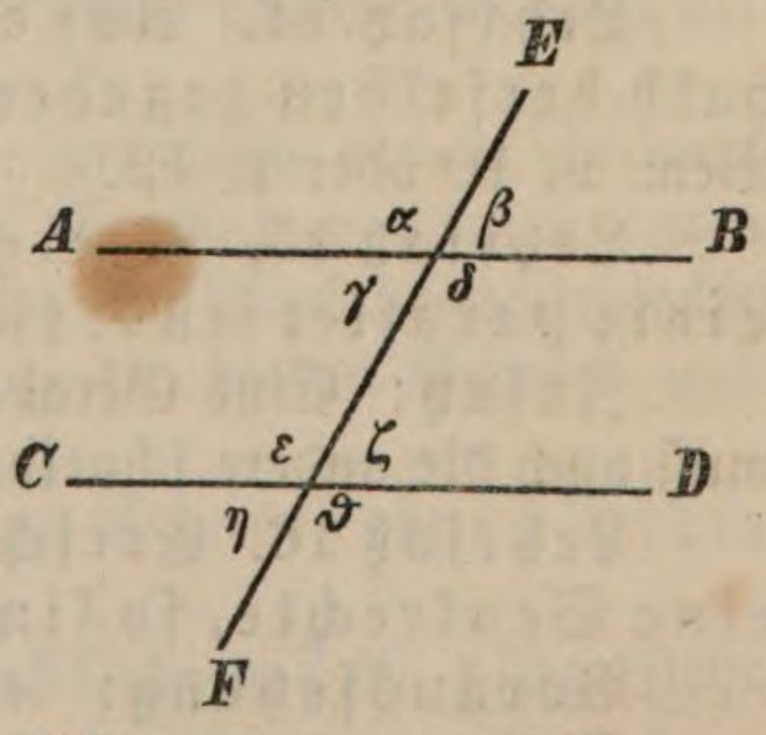


Beweis: Da γ nicht gleich ξ ist, so kann man durch den Durchschnittspunkt G von AB und EF eine Gerade MN so gelegt denken, daß der Winkel MGF gleich ξ ist. Dann ist nach L. 7 MN parallel zu CD. Da aber durch einen Punkt G sich zu einer Geraden CD nur eine Parallele legen läßt (§ 6, Grundsatz), so kann AB nicht parallel zu CD sein.

Zusatz: Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind zwei correspondirende Winkel einander nicht gleich, oder beträgt die Summe zweier Gegenwinkel, oder die Summe zweier conjugirter Winkel nicht zwei Rechte, so sind die geschnittenen Linien nicht parallel.

Anmerkung: Der Anfänger führe die Beweise für alle Fälle in derselben Weise, wie bei L. 8 durch.

Lehrsatz 9. (Umkehrung von L. 7). Werden zwei parallele Linien von einer dritten Geraden geschnitten, so sind a) je zwei Wechselwinkel und b) je zwei correspondirende Winkel einander gleich und es beträgt c) die Summe je zweier Gegenwinkel und d) die Summe je zweier conjugirter Winkel zwei Rechte.



Voraussetzung: $AB \parallel CD$.

Behauptung: $\alpha = \vartheta$ u. s. w.

Beweis: Wäre die Behauptung falsch (α nicht gleich ϑ), so wäre nach L. 8 AB nicht parallel CD. Da dies der Voraussetzung widerspricht, so ist auch die Annahme, (daß α nicht gleich ϑ sei) unrichtig, also ist $\alpha = \vartheta$.

Die Beweise für die übrigen Fälle sind in ähnlicher Weise auszuführen.

Lehrſatz 10. (Umkehrung von L. 8.) Werden zwei nicht parallele Linien von einer dritten Geraden geſchnitten, ſo ſind a) je zwei Wechſelwinkel und b) je zwei correſpondirende Winkel nicht gleich und es beträgt c) die Summe je zweier Gegenwinkel und d) die Summe je zweier conjugirter Winkel nicht zwei Rechte.

Beweis indirect, ähnlich, wie bei L. 9.

Erklärung: Zwei Linien, welche nicht parallel ſind, nennt man nach den Richtungen, welche zum Durchſchnittspunkt führen, convergent, nach der entgegengeſetzten divergent.

Zuſatz: Bei nicht parallelen Linien iſt von zwei äußeren Wechſelwinkeln derjenige der größere, welcher auf der Seite der ſchneidenden Linie liegt, auf welcher die geſchnittenen convergiren; bei zwei inneren Wechſelwinkeln verhält es ſich umgekehrt. Welcher von zwei correſpondirenden Winkeln iſt der größere? In welchem Falle beträgt die Summe zweier Gegenwinkel (oder conjugirter Winkel) mehr, in welchem weniger als zwei Rechte?

Anmerkung: Unter dem Winkel zweier convergirender Linien, welche nicht bis zu ihrem Durchſchnittspunkt verlängert ſind, kann man den Winkel verſtehen, welchen eine von ihnen mit irgend einer Geraden bildet, die durch einen beliebigen ihrer Punkte zu der anderen parallel gezogen iſt. Warum?

§ 12. Folgerungen für beſondere Fälle. Anwendungen.

Lehrſatz 11. Werden zwei parallele Linien von einer dritten Geraden geſchnitten, und iſt einer der entſtandenen Winkel ein rechter, ſo ſind auch die übrigen rechte; iſt aber einer derſelben ſchief, ſo ſind auch die übrigen ſchief. Bew. L. 9.

Zuſatz: Steht von beliebig vielen parallelen Geraden eine zu einer anderen Geraden ſenkrecht, ſo ſtehen auch die übrigen zu dieſer ſenkrecht.

Lehrſatz 12. (Umkehrung.) Stehen zwei (oder mehrere) Linien zu einer Geraden ſenkrecht, ſo ſind ſie parallel.

Beweis: Die Wechſelwinkel ſind rechte. L. 1, Zuſ., L. 7.

Lehrſatz 13. Auf einer Geraden kann in demſelben Punkte nur eine Senkrechte errichtet werden. Bew. indirect. L. 1, Zuſ. oder L. 12.

Lehrſatz 14. Auf eine Gerade läßt ſich von einem außerhalb derſelben gegebenen Punkte nur eine Senkrechte fällen. Bew. L. 10 oder L. 12.

Lehrſatz 15. Zwei gerade Linien, welche derſelben dritten Linie parallel ſind, ſind auch unter ſich parallel.

Zuſatz: Eine Gerade, welche die eine von zwei Parallelen ſchneidet, muß auch die andere ſchneiden.

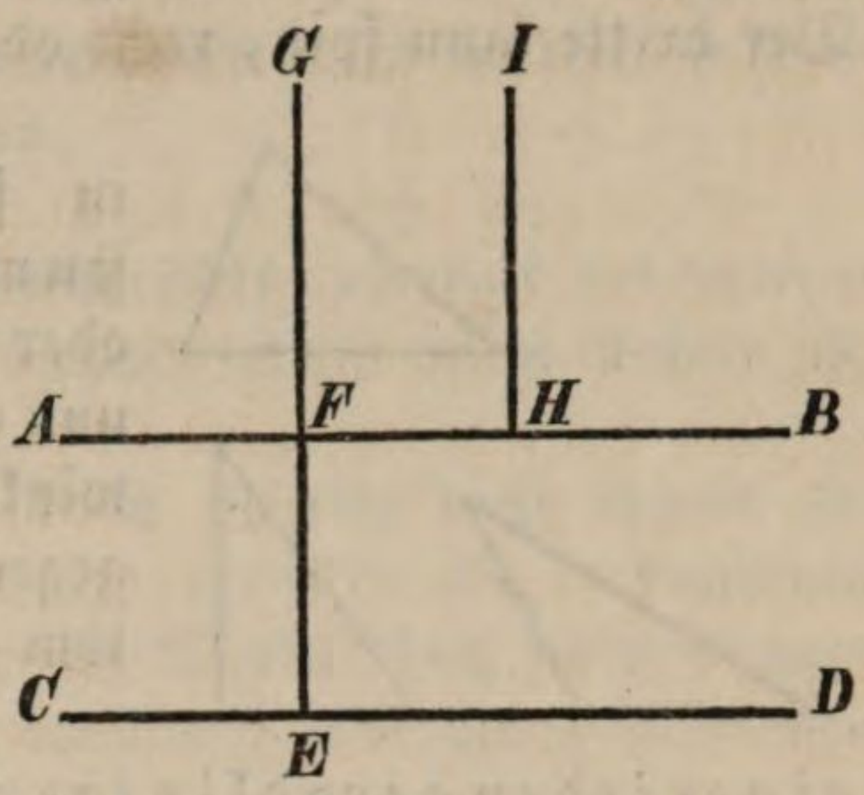
Lehrſatz 16. Errichtet man auf jeder von zwei Parallelen eine Senkrechte, ſo ſind die letzteren unter ſich parallel.

Vorausſetzung: $AB \parallel CD$, $GE \perp CD$, $JH \perp AB$.

Behauptung: $GE \parallel JH$.

Beweis: $\sphericalangle GFH = GED$ (L. 9), $\sphericalangle GED = R$ (Vor.), also $\sphericalangle GFH = R$. Nun ist auch $\sphericalangle JHB = R$ (Vor.), also $\sphericalangle GFH = JHB$ (L. 1, Zus.), also $GE \parallel JH$ (L. 7, Zus.).

Lehrsatz 17. Errichtet man auf jeder von zwei nicht parallelen Geraden eine Senkrechte, so sind diese letzteren einander nicht parallel.



Beweis ähnlich wie bei L. 16 (durch L. 10, L. 8).

Lehrsatz 18. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel und nach gleichen Richtungen laufen, sind gleich.

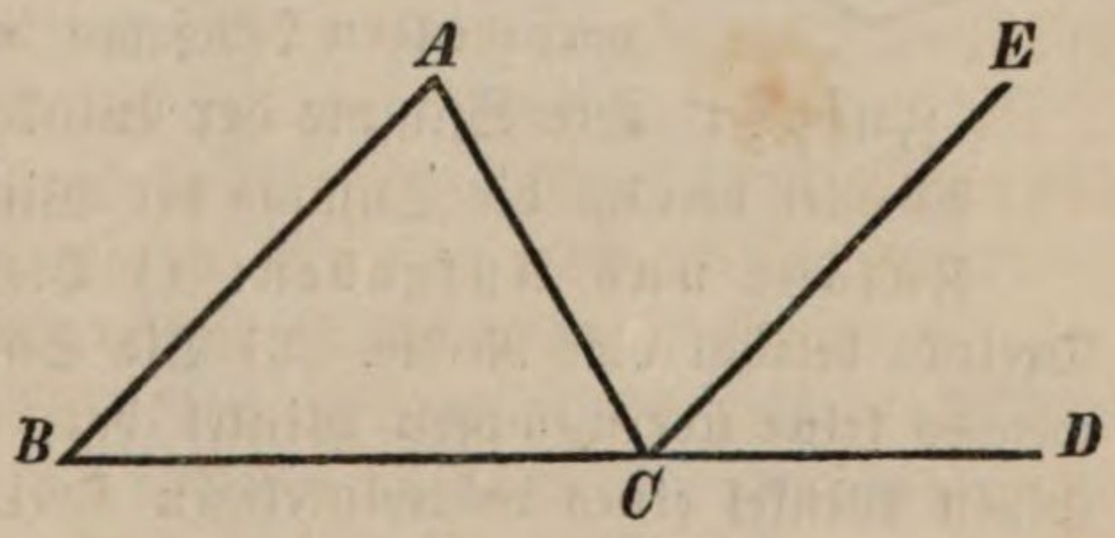
Beweis: Verlängere zwei nicht parallele Schenkel bis zum Durchschnittspunkt. Es entsteht ein dritter Winkel, welcher jedem der gegebenen gleich ist. L. 9.

Frage: Wie ändert sich dieser Satz a) wenn zwei Schenkel nach gleichen, zwei nach entgegengesetzten Richtungen laufen, b) wenn beide Schenkelpaare entgegengesetzte Richtungen haben?

§ 13. Die Winkel der geradlinigen Figuren.

Lehrsatz 19. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel.

Behauptung: $\sphericalangle ACD = ABC + BAC$.



Beweis: Zieht man CE parallel zu BA, so ist $\sphericalangle ACE = CAB$ (L. 9) und $\sphericalangle ECD = ABC$ (L. 9), also ist $\sphericalangle ACE + ECD = CAB + ABC$, oder $\sphericalangle ACD = CAB + ABC$.

Anmerkung: Daß CE innerhalb des Winkels ACD fallen muß, folgt aus L. 10, Zus.

Zusatz 1. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder einzelne der ihm gegenüberliegenden inneren Winkel. Wieviel beträgt der Unterschied?

Zusatz 2. Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Dreiecks mit zwei Eckpunkten desselben, so schließen die Verbindungslinien einen Winkel ein, welcher größer ist, als der gegenüberliegende Winkel des Dreiecks.

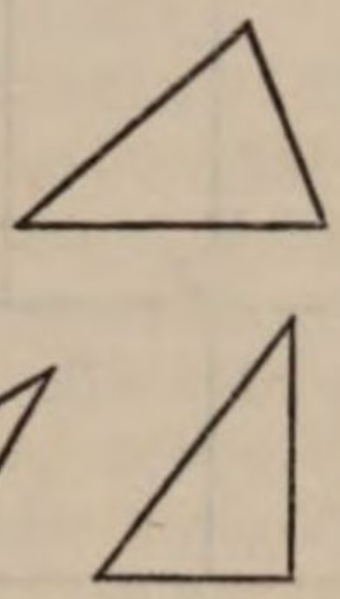
Beweis: Man ziehe eine Gerade durch die beiden Scheitel und benutze Zus. 1.

Lehrsatz 20. Die Summe der inneren Winkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.

Behauptung: $\sphericalangle CAB + ABC + BCA = 2R$. (Fig. siehe Lehrs. 19.)

Beweis: $\sphericalangle ACD + BCA = 2R$ (L. 2), $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB + ABC$ (L. 19.), also ist auch $\sphericalangle CAB + ABC + BCA = 2R$.

Zusatz: Ein Dreieck kann nicht mehr als einen rechten oder einen stumpfen Winkel haben. Jedes Dreieck hat wenigstens zwei spitze Winkel. Der dritte kann spitz, recht oder stumpf sein.



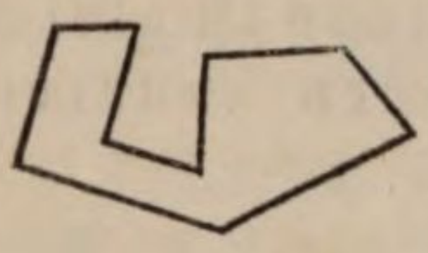
Erklärung. Man theilt die Dreiecke ein in spitzwinkelige, rechtwinkelige und stumpfwinkelige, je nachdem sie drei spitze, oder zwei spitze und einen rechten, oder zwei spitze und einen stumpfen Winkel haben. In einem rechtwinkeligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse, die ihm anliegenden Seiten heißen die Katheten.

Lehrsatz 21. Die Summe der Winkel einer jeden geradlinigen Figur beträgt doppelt so viel Rechte, als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechte.

Die Summe der Winkel eines n-Ecks ist gleich $(2n-4)\,R$.

Beweis: Man verbinde einen beliebigen Punkt im Innern der Figur mit sämmtlichen Eckpunkten, bestimme die Summe der Winkel der entstandenen n Dreiecke und subtrahire von derselben die Summe der Winkel um den angenommenen Punkt.

Anmerkung: Bei Polygonen mit überstumpfen Winkeln kann, wie z. B. in beistehender Figur, der Fall vorkommen, daß dieselben sich nicht von einem Punkt im Innern aus in Dreiecke zerlegen lassen. Wie kann man in solchen Fällen die Richtigkeit des vorstehenden Lehrsatzes beweisen?



Zusatz: Die Summe der Winkel eines Vierecks beträgt vier Rechte.

Wieviel beträgt die Summe der Winkel eines Fünfecks, eines Sechsecks?

Zusätze und Aufgaben: 1) Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks beträgt vier Rechte. 2) Die Summe der Außenwinkel eines Polygons, welches keine überstumpfen Winkel hat, beträgt 4 Rechte. 3) Die Summe der spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks beträgt einen Rechten; die Summe der spitzen Winkel eines stumpfwinkeligen Dreiecks ist kleiner, die je zweier Winkel eines spitzwinkeligen Dreiecks größer, als ein rechter. 4) Umkehrung von 3. 5) Berechne die Größe jedes Winkels in einem n-Eck, dessen Winkel sämmtlich einander gleich sind, im Besonderen für das Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck und Zehneck. 6) Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist die Größe des dritten bestimmt. 7) Berechne die Größe eines Winkels eines Dreiecks, wenn die beiden anderen gegeben sind. Beispiele: a) 54°,37°. b) 22°17′; 98°4′. c) 132°16′5″; 45°12′59″. d) 14°22′17″,4; 88°12′39″,7. e) 0°0′5″,4; 5°6′12″. f) 13°13′13″,13; 99°59′59″,90. 8) Ist in einem Dreieck die Summe zweier Winkel gleich dem dritten, so ist der dritte ein rechter. 9) Stimmen zwei Dreiecke paarweise in zwei Winkeln überein, so sind auch ihre dritten Winkel einander gleich.

Anhang 1. Uebungssätze und Aufgaben.

1. Halbirt man jeden von zwei Nebenwinkeln, so stehen die Halbirungslinien senkrecht zu einander.

2. Halbirt man den einen von zwei Scheitelwinkeln, so halbirt die Verlängerung der Halbirungslinie auch den anderen.

3. Umkehrung von 1.

4. Zieht man durch den Scheitel eines rechten Winkels außerhalb des letzteren eine Gerade, so entstehen zwei Winkel, deren Summe gleich einem Rechten ist.

---

5. Werden beliebig viele parallele Linien durch beliebig viele andere geschnitten, die unter sich ebenfalls parallel sind, so zerfallen die entstandenen hohlen Winkel in zwei Gruppen, der Art, daß die Winkel einer jeden Gruppe unter sich gleich sind, dagegen zwei Winkel aus verschiedenen Gruppen zusammen zwei Rechte betragen.

6. Werden zwei parallele Linien von einer Geraden so geschnitten, daß zwei Gegenwinkel gleich sind, so steht die schneidende Linie zu den parallelen senkrecht.

7. Halbirt man bei zwei parallelen, von einer dritten Geraden geschnittenen Linien ein Paar correspondirende oder Wechselwinkel, so sind die Halbirungslinien parallel.

---

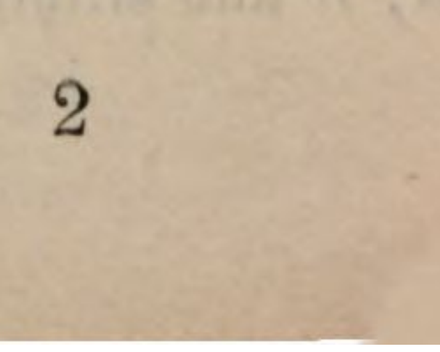
8. Halbirt man an zwei von einer dritten Geraden geschnittenen Parallelen ein Paar Gegenwinkel, so stehen die Halbirungslinien zu einander senkrecht.

9. Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Winkels Perpendikel auf die Schenkel, so beträgt der von den Perpendikeln gebildete Winkel mit dem ursprünglichen zusammen zwei Rechte. Der von einem Perpendikel und der Verlängerung des anderen gebildete Winkel ist dem gegebenen gleich.

10. Nimmt man außerhalb eines spitzen Winkels einen Punkt so an, daß die von ihm auf die Schenkel gefällten Perpendikel diese selbst treffen, so ist der von den Perpendikeln gebildete Winkel dem gegebenen gleich.

11. Fällt man vom Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so entstehen zwei Dreiecke, welche mit dem ersten in den Winkeln übereinstimmen.

12. Die Summe der fünf hohlen Winkel eines Sternfünfecks (Pentagramm's) beträgt 2 Rechte. Wieviel beträgt die Summe der hohlen Winkel eines Sternsiebenecks?



13. Zwei Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich dem dritten; wie groß ist dieser?

14. In einem Zwölfeck beträgt jeder folgende Winkel $1°20'$ mehr als der vorhergehende; wie groß ist der erste?

15. Wie groß sind die Winkel eines Vierecks, in welchem drei Winkel gleich und jeder von diesen dreimal so groß als der vierte ist?

II. Capitel.

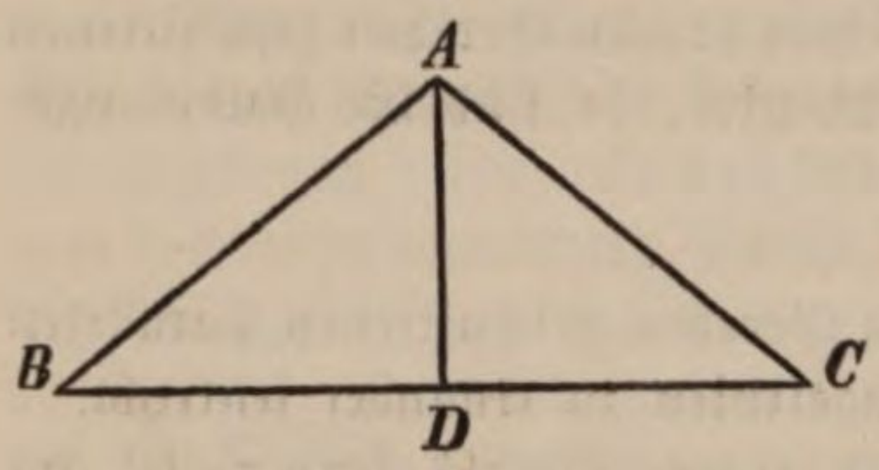
Von den Seiten und Winkeln der Dreiecke.

§ 14. Von den Seiten und Winkeln eines einzelnen Dreiecks.

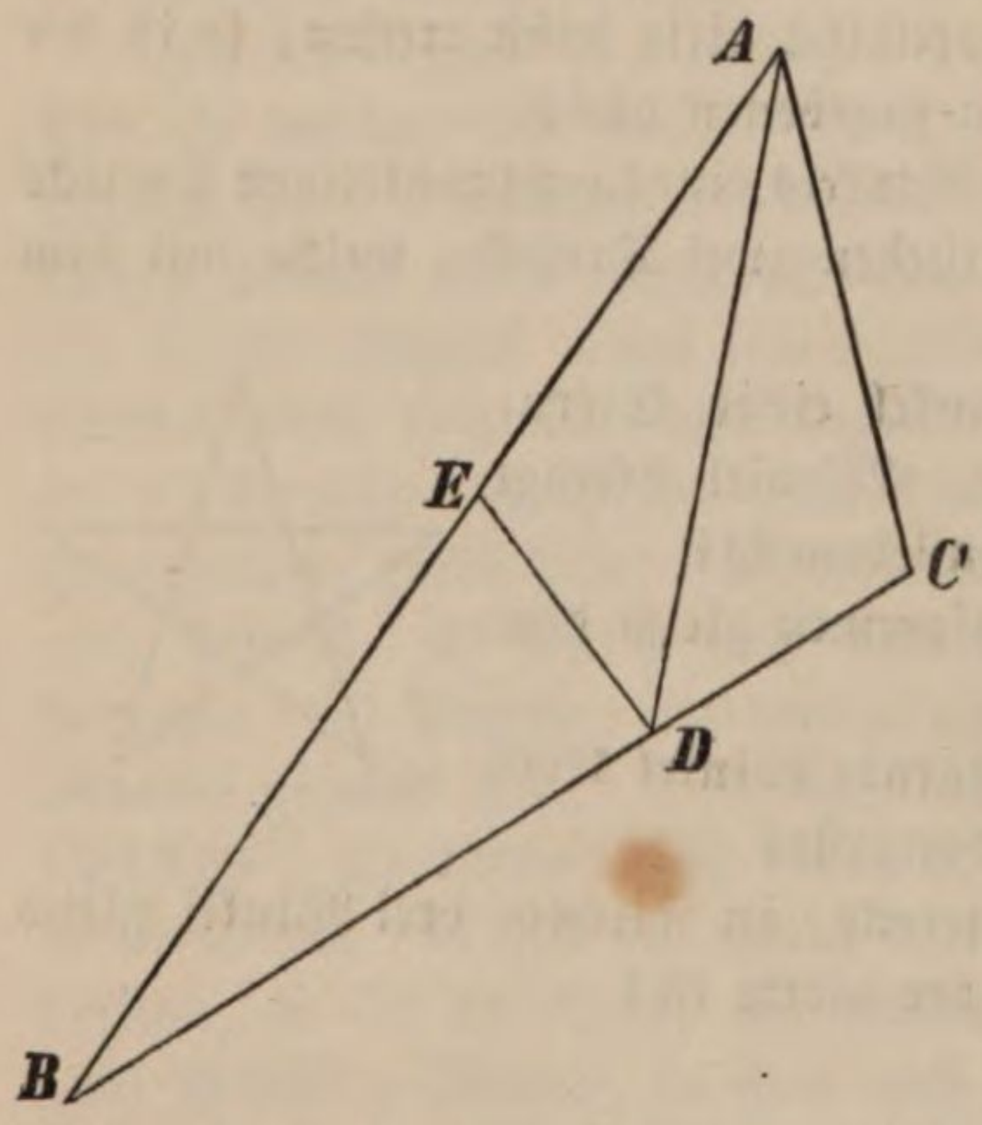
Erklärung: Man theilt die Dreiecke nach der Beschaffenheit ihrer Seiten ein in 1) gleichseitige, in welchen alle drei Seiten gleich sind, 2) gleichschenkelige, welche zwei gleiche Seiten haben und 3) ungleichseitige, welche keine gleichen Seiten haben.

In einem gleichschenkeligen Dreieck heißen die gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie oder Basis und der letzterer gegenüberliegende Eckpunkt der Scheitel oder die Spitze.

Lehrsatz 22. Gleichen Seiten in einem Dreieck liegen gleiche Winkel gegenüber.



Voraussetzung: $AB = AC$.
Behauptung: $\sphericalangle ABC = ACB$.
Beweis: Man denke sich den dritten Winkel BAC durch die Linie AD halbirt, welche die dritte Seite BC in D trifft, und denke sich das Dreieck ACD so auf das Dreieck ABD gelegt, daß die Punkte A und D und somit auch die Seite AD gemeinschaftlich bleiben; dann fällt AC in die Richtung von AB, weil $\sphericalangle CAD = BAD$ nach Construction. Ferner fällt der Punkt C auf B, da $AC = AB$ ist nach Voraussetzung. Daher fällt endlich CD auf BD, da zwischen den Punkten B und D nur eine Gerade möglich ist. Also deckt der Winkel ACD den Winkel ABD und ist mithin demselben gleich.



Anmerkung: Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sind gleich.

Zusatz: Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich. Daher beträgt jeder derselben $\frac{2}{3}$ R oder 60^0.

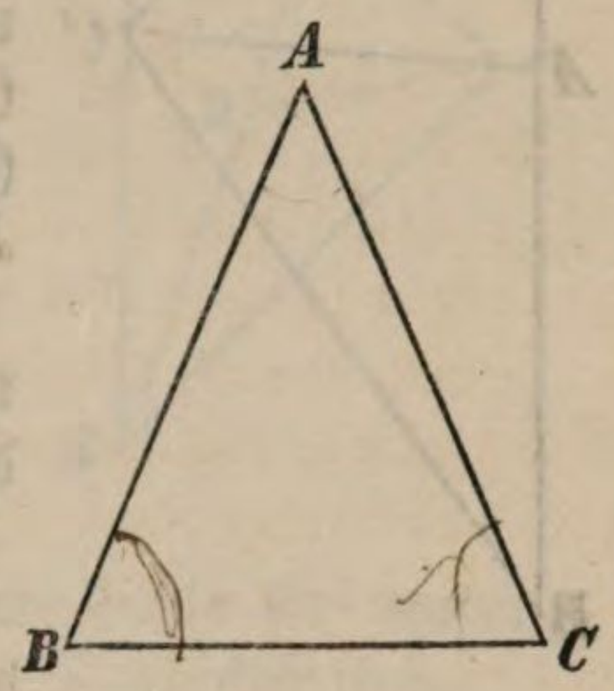
Lehrsatz 23. Der größeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt ein größerer Winkel gegenüber.

Voraussetzung: $AB > AC$.
Behauptung: $\sphericalangle ACB > ABC$.
Beweis: Man denke sich den dritten Winkel BAC des Dreiecks durch die Linie AD, welche BC in D schneidet, halbirt und das Dreieck ACD so auf ABD gelegt, daß die Punkte A, D und mithin auch die Seite AD beiden gemeinschaftlich bleiben; dann

fällt AC in die Richtung von AB, weil nach Construction $\sphericalangle CAD = BAD$ ist. Ferner fällt C zwischen A und B, etwa nach E, weil AC nach Voraussetzung $< AB$ ist. Die Linie CD fällt also nach ED und der Winkel ACD nach AED. Nun ist $\sphericalangle AED > ABD$ nach Lehrsatz 19, Zusatz 1, also ist auch $\sphericalangle ACB > ABC$.

Zusatz: Der größten Seite eines Dreiecks liegt der größte Winkel gegenüber.

Lehrsatz 24. (Umkehrung von 22.) Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber.



Voraussetzung: $\sphericalangle ACB = ABC$.

Behauptung: $AB = AC$.

Beweis: Wäre $AB > AC$, so wäre nach Lehrsatz 23 $\sphericalangle ACB > ABC$, was der Voraussetzung widerspricht; wäre aber $AB < AC$, so müßte nach Lehrsatz 23 $\sphericalangle ACB < ABC$ sein, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Also muß AB gleich AC sein.

Anmerkung: Sind also in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist dasselbe gleichschenkelig.

Zusatz: Sind in einem Dreieck alle drei Winkel gleich, so ist dasselbe gleichseitig.

Lehrsatz 25. (Umkehrung von 23.) Dem größeren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt eine größere Seite gegenüber.

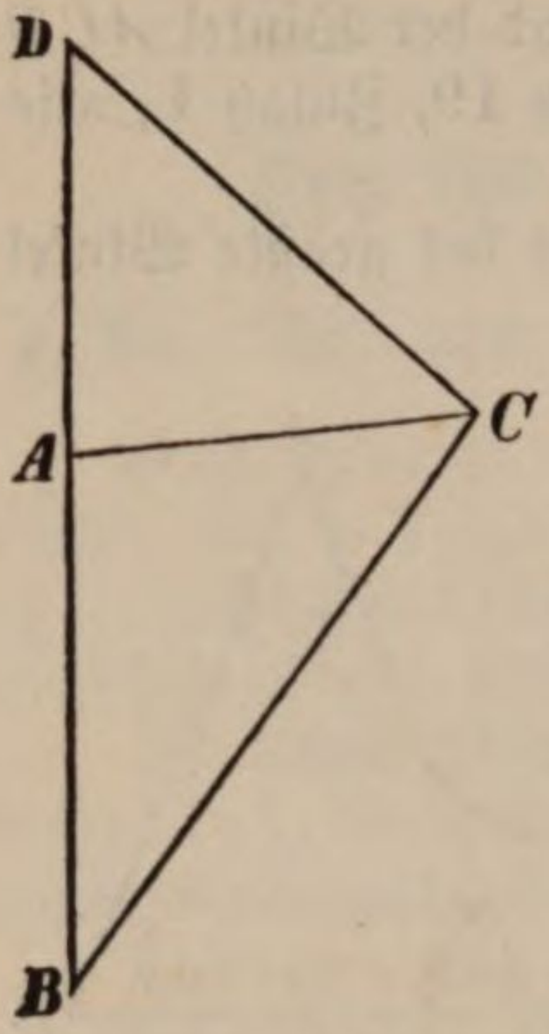
Beweis indirect, ähnlich wie bei Lehrsatz 24.

Zusatz 1. Dem größten Winkel eines Dreiecks liegt die größte Seite desselben gegenüber.

Zusatz 2. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse größer als jede Kathete. — Welcher ähnliche Satz gilt für das stumpfwinkelige Dreieck?

Sätze und Aufgaben zu § 14. 1) In einem gleichschenkeligen Dreieck sind die Außenwinkel an der Grundlinie gleich. 2) Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ist doppelt so groß als jeder der inneren Winkel an der Grundlinie. 3) Die Halbirungslinie des Außenwinkels an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ist der Grundlinie parallel. 4) In einem gleichschenkeligen Dreieck ist durch einen Winkel jeder der anderen bestimmt. 5) Aus dem gegebenen Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks den Winkel an der Grundlinie zu berechnen. Beispiel: $\alpha = 15^0$; $22^0 17' 3''$; $125^0 4' 11''$. 6) Aus einem der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks den Winkel an der Spitze zu berechnen. Beispiel: $\beta = 79^0 11'$; $25^0 8' 7''$; $31^0 11' 15''$. 7) Stimmen zwei gleichschenkelige Dreiecke in den Winkeln an der Spitze oder stimmen sie in einem der Winkel an der Grundlinie überein, so sind auch die anderen Winkel paarweise gleich. 8) In jedem gleichschenkeligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie spitz, die Außenwinkel an derselben stumpf. 9) In einem gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreieck beträgt jeder spitze Winkel $\frac{1}{2} R$ oder 45^0. 10) Zieht man in einem gleichschenkeligen Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so ist das durch dieselbe abgeschnittene Dreieck ebenfalls gleichschenkelig (2 Fälle).

§ 15. Summe und Differenz der Seiten.



Lehrsatz 26. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist immer größer, als die dritte Seite.

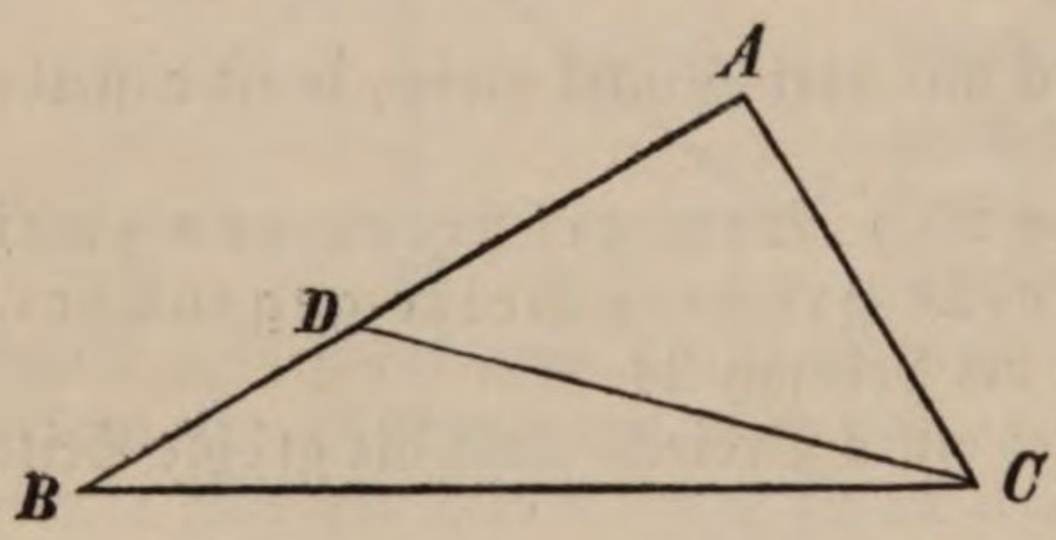
Behauptung: $BA + AC > CB$.

Beweis: Man verlängere BA über A hinaus um AD gleich AC und ziehe DC, so ist $\sphericalangle ACD = ADC$ (L. 22), also $\sphericalangle DCB > ADC$, mithin $BD > BC$ (L. 25). Da nun $BD = BA + AC$ ist, so ist auch $BA + AC > CB$.

Lehrsatz 27. Die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks ist immer kleiner als die dritte Seite.

Behauptung: $AB - AC < BC$.

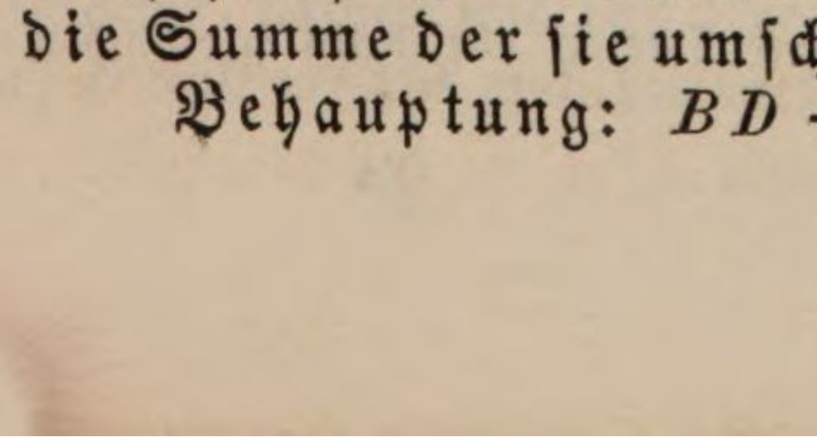
Beweis: Ist $AB = AC$, so ist $AB - AC = 0$, daher kein Beweis nöthig; sind aber AB und AC ungleich, so kann man von der größeren AB derselben von A aus eine Strecke $AD = AC$ abtragen, wodurch $BD = AB - AC$ wird. Zieht man nun DC, so ist das Dreieck ADC gleichschenkelig, seine Winkel an der Grundlinie DC sind also spitze, mithin ist $\sphericalangle BDC$ stumpf, daher liegt ihm im Dreieck BDC die größte Seite gegenüber. Also ist



$$DB < BC, \text{ oder}$$
$$AB - AC < BC.$$

Anmerkung: Ist $a + b > c$, so ist $a > c - b$.

Lehrsatz 28. Jede gebrochene Linie, welche zwei Punkte verbindet, ist größer als die zwischen denselben Punkten liegende Gerade.



Behauptung: $AB + BC + CD + DE > AE$.

Beweis: $AB + BC > AC$ (L. 26), $AC + CD > AD$ (L. 26), also um so mehr $AB + BC + CD > AD$; ferner ist $AD + DE > AE$ (L. 26), also wieder um so mehr $AB + BC + CD + DE > AE$. Man sieht, daß man diesen Beweis so weit ausdehnen kann, als man will.

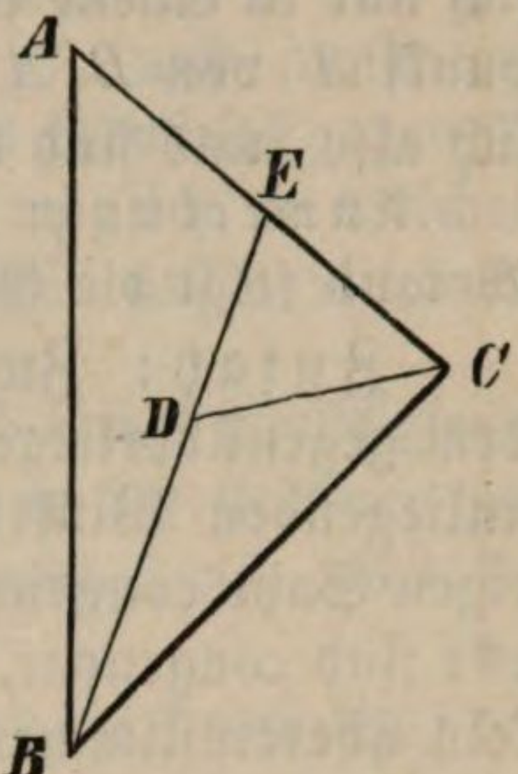
Zusatz: Jede krumme Linie zwischen zwei Punkten ist größer, als die zwischen denselben Punkten liegende Gerade. — Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.

Lehrsatz 29. Verbindet man einen beliebigen im Innern eines Dreiecks liegenden Punkt mit zwei Eckpunkten desselben, so ist die Summe der Verbindungslinien kleiner, als die Summe der sie umschließenden beiden Dreiecksseiten.

Behauptung: $BD + CD < BA + AC$.

Beweis: Man verlängere BD über D bis zu ihrem Durchschnittspunkt E mit AC. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} BA + AE &> BD + DE, \\ DE + EC &> CD, \end{aligned}\right\} \text{(L. 26.)}$$



$$\text{also } BA + AE + DE + EC > BD + DE + CD,$$
$$DE = DE,$$
$$\text{also } BA + AE + EC > BD + CD,$$
$$\text{oder } BA + AC > BD + CD.$$

Zusatz 1. Jede zwischen zwei Eckpunkten eines Dreiecks innerhalb desselben gezogene gebrochene Linie, welche keine einspringenden Winkel hat, ist kleiner, als die Summe der beiden sie umschließenden Dreieckseiten.

Zusatz 2. Jede zwischen zwei Eckpunkten eines Dreiecks innerhalb desselben gezogene krumme Linie, welche der dieselben Punkte verbindenden Seite stets ihre hohle Krümmung zukehrt, ist kleiner, als die Summe der beiden anderen Dreiecksseiten.

Sätze zu §. 15:

1) In jedem Viereck ist die Summe zweier gegenüberstehender Seiten kleiner als die Summe der Diagonalen (L. 26).

2) Verbindet man einen Punkt im Innern eines Sechsecks mit allen Eckpunkten desselben, so ist die Summe der Verbindungslinien größer als die Summe je dreier nicht aneinander stoßender Seiten.

3) Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die halbe Summe der drei Seiten.

4) Der Umfang eines Dreiecks, dessen Eckpunkte auf den Seiten eines anderen Dreiecks liegen, ist kleiner als der Umfang des letzteren.

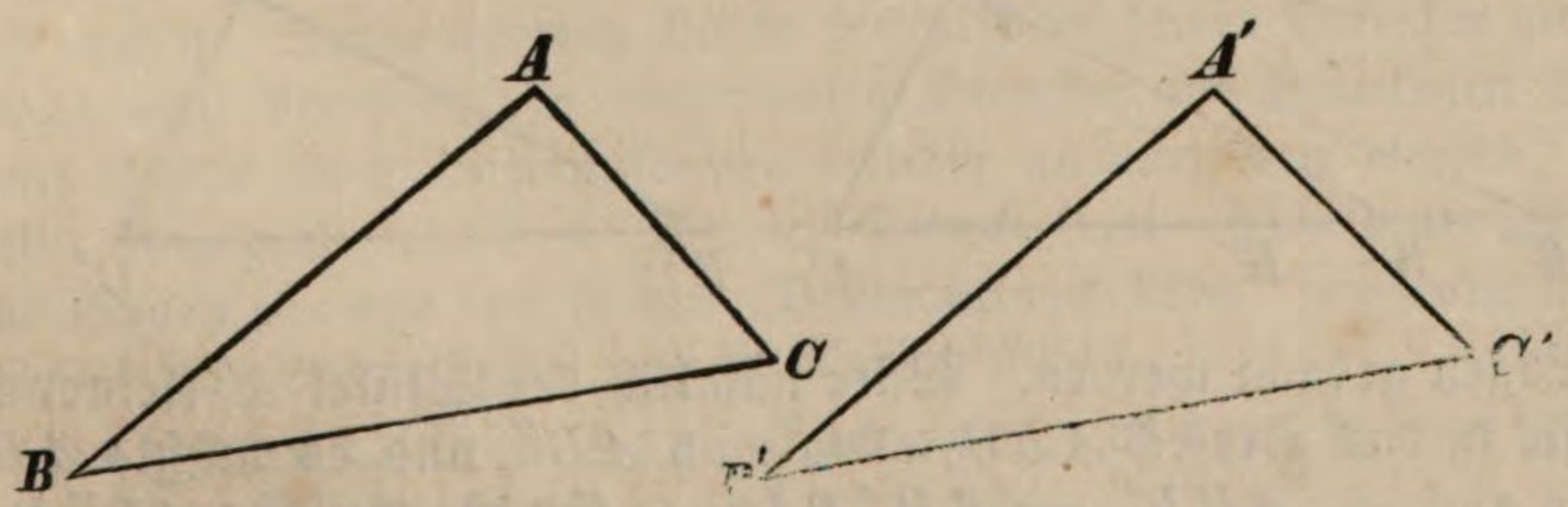
§ 16. Von der Congruenz der Dreiecke.

Lehrsatz 30. Zwei Dreiecke, welche in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen auch in den drei übrigen Stücken paarweise überein, oder sind congruent.

Voraussetzung: $BC = B'C'$, $\sphericalangle B = B'$, $\sphericalangle C = C'$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis Man denke sich das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC gelegt, daß der Punkt B' auf den Punct B und die Linie $B'C'$ in



die Richtung von BC fällt, dann fällt der Punkt C' auf C, weil $B'C' = BC$ ist, nach Voraussetzung. Ferner fällt die Seite $B'A'$ in die Richtung

von BA, weil nach Voraussetzung $\sphericalangle B' = B$ ist. Ebenso fällt $C'A'$ in die Richtung von CA, weil $\sphericalangle C' = C$ ist. Da nun zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können, so muß auch der Durchschnittspunkt A' von $B'A'$ und $C'A'$ auf den Punkt A fallen; die Dreiecke decken sich also, und sind mithin congruent.

Anmerkung: Welche Stücke der beiden Dreiecke sind also außerdem gleich? Woraus folgt die Gleichheit der Winkel A' und A auch ohne dies?

Zusatz: Zwei Dreiecke, die in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, müssen auch die anderen anliegenden Winkel gleich haben (S. 16, Zus. 9), sind also nach dem vorigen Satze congruent. Man kann daher allgemein behaupten: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

Lehrsatz 31. Zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind congruent (Fig. s. Lehrsatz 30).

Voraussetzung: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\sphericalangle A = A'$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis: Man denke sich das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC gelegt, daß der Punkt A auf den Punkt A' und die Seite $A'C'$ in die Richtung von AC fällt, dann fällt auch der Punkt C' auf C (warum?), die Linie $A'B'$ in die Richtung von AB (warum?) und endlich der Punkt B' auf B (warum?). Da nun zwischen den beiden Punkten B und C nur eine gerade Linie möglich ist, so muß auch $B'C'$ auf BC fallen. Also decken sich die Dreiecke und sind mithin congruent.

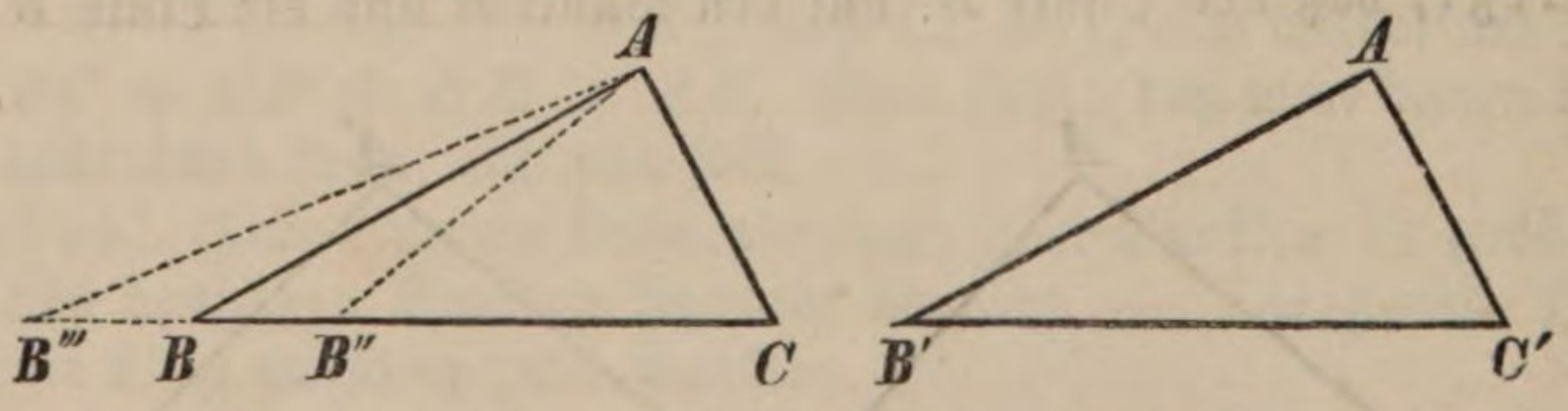
Frage: Welche anderen Stücke sind also in den beiden Dreiecken gleich?

Lehrsatz 32. Zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind congruent.

Voraussetzung: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\sphericalangle C = C'$, $AB > AC$ ($A'B' > A'C'$).

Behauptung: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis: Man denke sich das Dreieck $A'B'C'$ so auf ABC gelegt, daß der Punkt C' auf C und die Seite $C'B'$ in die Richtung von CB fällt. Dann muß auch A' auf A fallen (warum?). Die Seite $A'B'$ aber kann



in drei Lagen gedacht werden. Wäre nämlich der Winkel A' kleiner als A, so fiele sie in das Dreieck ABC, etwa nach AB'' und es müßte $AB'' = AB$, also auch $\sphericalangle ABB'' = AB''B$ sein. Es ist aber $\sphericalangle AB''B > C$ (L. 19, Zus. 1.), also wäre auch $\sphericalangle B > C$ und mithin $AC > AB$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung. Wäre ferner der Winkel A' größer

als A, so fiele $A'B'$ außerhalb des Dreiecks ABC, etwa in die Richtung AB''', der Punkt B' also auf die Verlängerung von CB, nach B'''. Dann wäre $AB''' = AB$, also auch $\sphericalangle AB'''B = ABB'''$. Nun ist $\sphericalangle ABB''' > C$ (L. 19, Zus. 1), also wäre auch $\sphericalangle AB'''B > C$, und somit auch $\sphericalangle B' > C'$, also Seite $A'C' > A'B'$ (L. 25), was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Mithin ist nur noch der dritte Fall möglich, in welchem $\sphericalangle A' = A$ ist, also $A'B'$ in die Richtung von AB fällt und somit beide Dreiecke sich decken. Daher sind dieselben congruent.

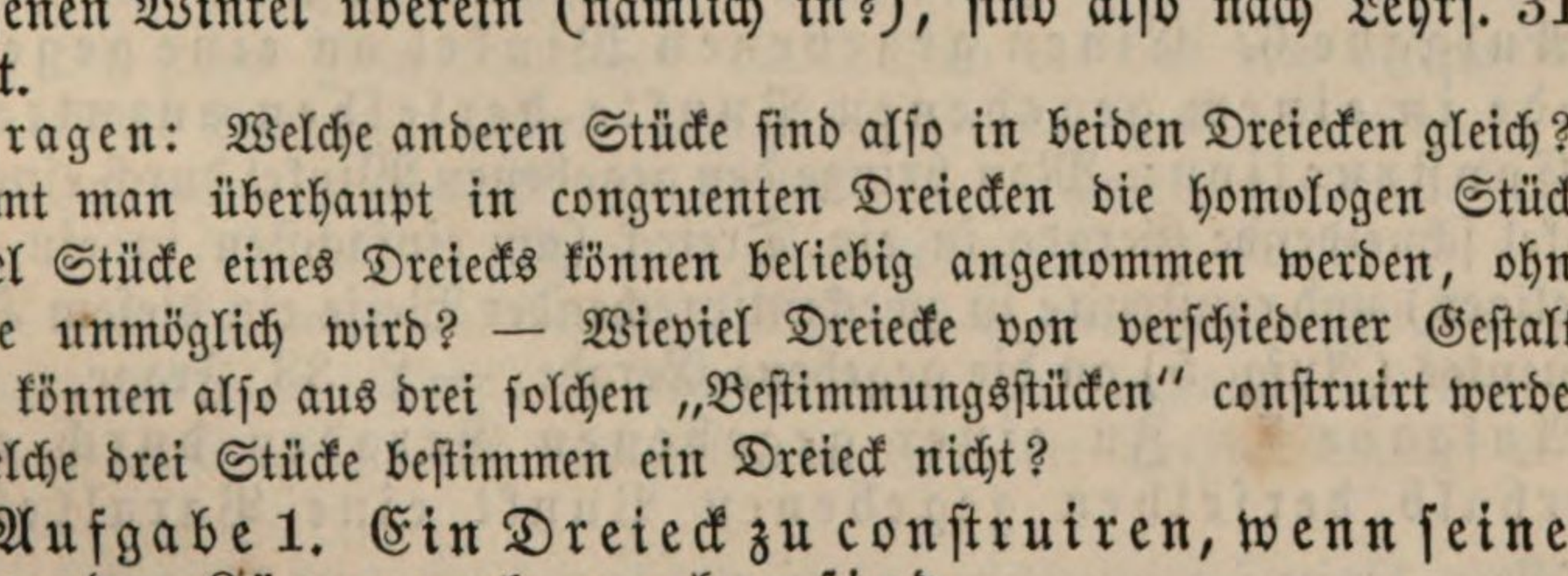
Frage: Welche anderen Stücke der beiden Dreiecke sind also ebenfalls gleich? Können auch zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, congruent sein? Müssen sie es?

Lehrsatz 33. Zwei Dreiecke, welche in den drei Seiten übereinstimmen, sind congruent.

Voraussetzung: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis: Man denke sich das Dreieck $A'B'C'$ so an ABC gelegt, daß der Punkt A' auf A und die Seite $A'C'$ in die Richtung von AC fällt, beide Dreiecke aber auf verschiedenen Seiten dieser Linie liegen. Dann fällt auch C' auf C (warum?), und das Dreieck $A'B'C'$ erhält die Lage von ACD, so daß also $AD = AB$, $CD = CB$ ist. Zieht man nun BD,



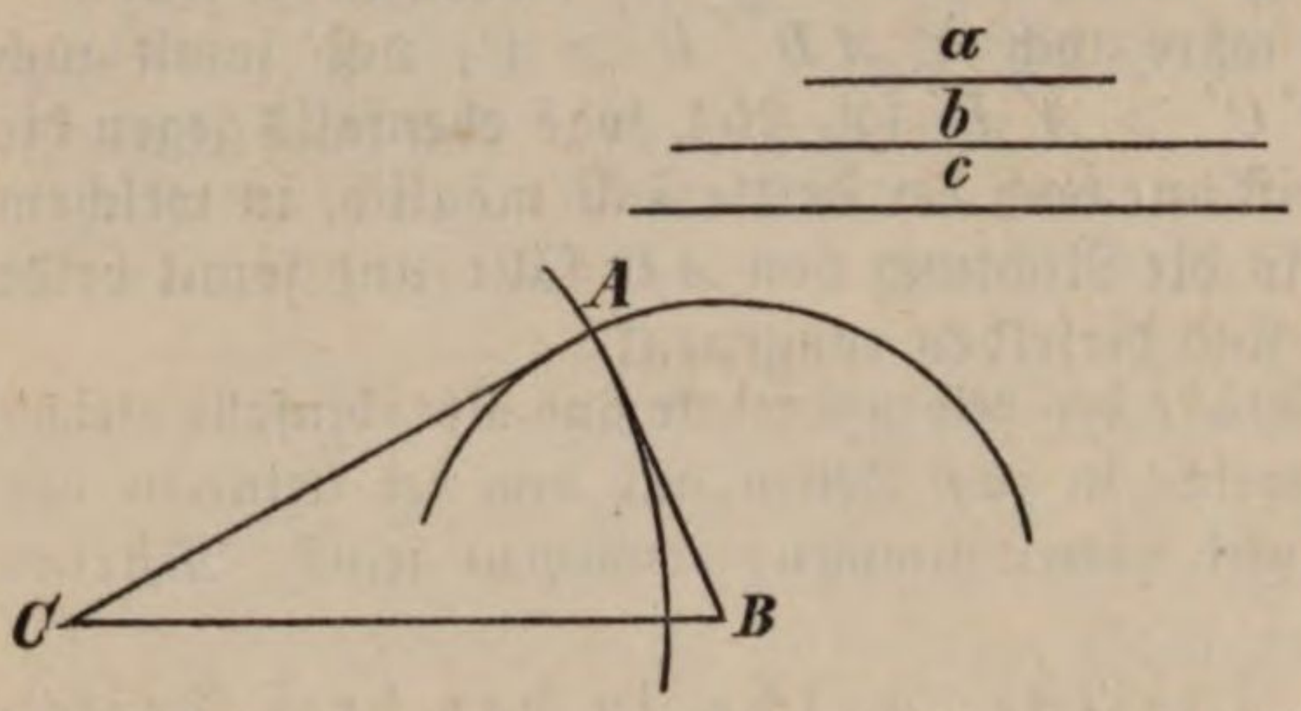
so ist das Dreieck ABD gleichschenkelig, also $\sphericalangle ABD = ADB$. Ebenso ist das Dreieck BCD gleichschenkelig, also $\sphericalangle CBD = CDB$. Daher ist auch $\sphericalangle ABD + CBD = ADB + CDB$, oder $\sphericalangle ABC = ADC$; daher stimmen beide Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein (nämlich in?), sind also nach Lehrs. 31 congruent.

Fragen: Welche anderen Stücke sind also in beiden Dreiecken gleich? Wie bestimmt man überhaupt in congruenten Dreiecken die homologen Stücke? — Wieviel Stücke eines Dreiecks können beliebig angenommen werden, ohne daß dasselbe unmöglich wird? — Wieviel Dreiecke von verschiedener Gestalt und Größe können also aus drei solchen „Bestimmungsstücken" construirt werden? — — Welche drei Stücke bestimmen ein Dreieck nicht?

Aufgabe 1. Ein Dreieck zu construiren, wenn seine drei Seiten der Länge nach gegeben sind.

Construction: Gegeben seien die Strecken a, b, c. Man zeichne eine beliebige Gerade, trage auf derselben eine Strecke CB gleich c ab,

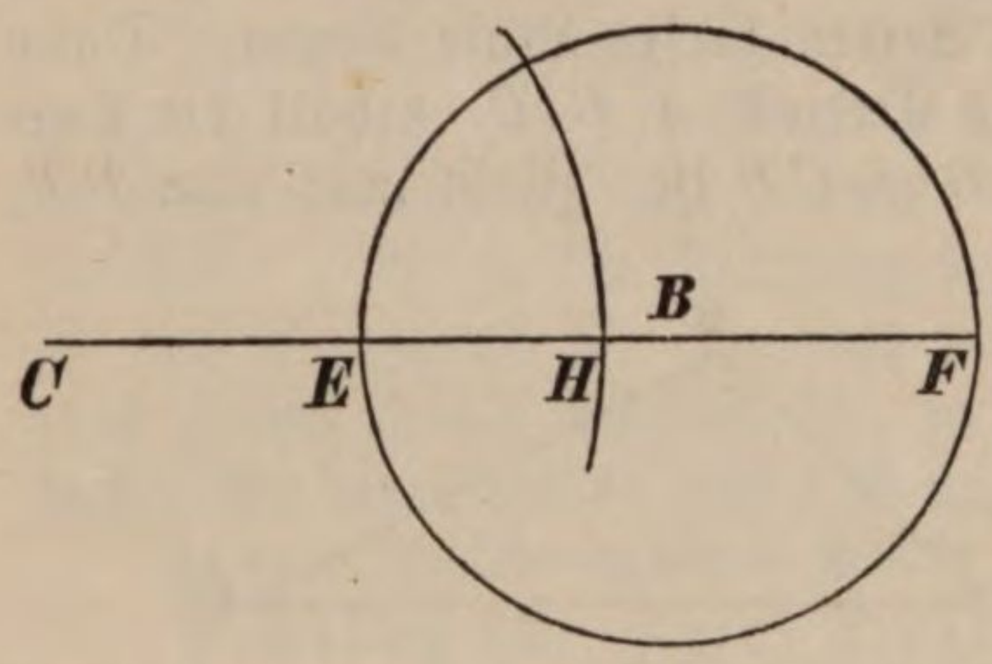
beſchreibe um C mit einem Radius gleich b und um B mit einem Radius gleich a einen Kreisbogen und verbinde den Durchſchnittspunkt A der Bögen mit B und C, ſo iſt ABC das verlangte Dreieck.



Beweis: Es iſt $CB = c$, nach Conſtruction, $CA = b$, als Radius eines mit b um C beſchriebenen Kreiſes, und $BA = a$, als Radius eines mit a um B beſchriebenen Kreiſes. Alſo hat das Dreieck ABC die verlangten Seiten.

Discuſſion. Das Dreieck kann nicht gezeichnet werden, wenn die Summe zweier der gegebenen Seiten größer (oder ihre Differenz kleiner) als die dritte iſt (nach L. 26. 27). Anderen Falls iſt die Conſtruction immer möglich.

Denn trifft der um B beſchriebene Kreis die Linie CB oder ihre Verlängerung in E und F, ſo iſt $CE = CB - EB = c - a$, alſo kleiner als b, und $CF = CB + BF = c + a$, alſo größer als b. Wird nun um C mit b als Radius ein Kreis beſchrieben, ſo muß E innerhalb und F außerhalb deſſelben liegen, woraus folgt, daß der um B beſchriebene Kreis die Peripherie des um C beſchriebenen in zwei Punkten durchſchneiden muß. Die beiden ſo beſtimmten Dreiecke wie alle anderen, welche ſich aus den drei gegebenen Seiten conſtruiren laſſen, ſind congruent.



Aufgabe 2. Ein gleichſchenkeliges Dreieck zu conſtruiren, wenn ein Schenkel und die Baſis gegeben ſind.

Aufgabe 3. Ein gleichſeitiges Dreieck zu conſtruiren, wenn eine Seite deſſelben gegeben iſt.

Aufgabe 4. Einen Winkel von 60 Grad zu conſtruiren.

Aufgabe 5. Ein Dreieck zu conſtruiren, welches einem gegebenen congruent iſt.

Conſtruction mit Hülfe der drei Seiten des gegebenen. Aufg. 1.

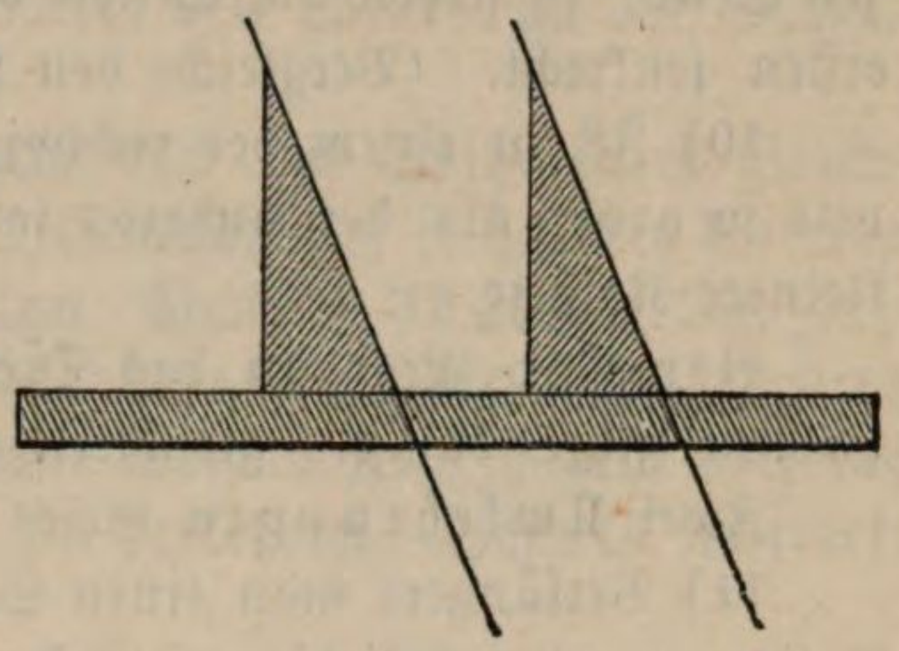
Aufgabe 6. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derſelben anzutragen.

Conſtruction: Man bringe den gegebenen Winkel durch eine ſeine Schenkel ſchneidende Gerade in ein Dreieck (am einfachſten in ein gleichſchenkeliges) und conſtruire in zweckentſprechender Weiſe ein dieſem Dreieck congruentes (Aufg. 5) an die gegebene Gerade. — L. 33, Frage.

Aufgabe 7. Zu einer gegebenen Geraden durch einen außerhalb derſelben gegebenen Punkt eine Parallele zu ziehen.

Conſtruction mittelſt einer durch den Punkt gehenden Geraden und gleicher correſpondirender (oder Wechſel-) Winkel. Aufg. 6.

Anmerkung: Mittelst eines festgelegten und eines verschiebbaren dreieckigen Lineals läßt sich diese Aufgabe in praktisch bequemer Weise lösen, wie die nachstehende Figur veranschaulicht.



Aufgabe 8. Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu construiren. Constr. A. 6.

Aufgabe 9. Ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel zu construiren. Constr. A. 6. 7.

Aufgabe 10. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu construiren. A. 6.

Aufgabe 11. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel zu construiren. A. 6. Einen Kreis mit gegebenem Radius um einen gegebenen Punkt zu beschreiben.

Sätze zu § 16.

1) Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen a) in einer Kathete und dem ihr anliegenden spitzen Winkel, b) in einer Kathete und dem ihr gegenüberliegenden spitzen Winkel, c) in der Hypotenuse und einem spitzen Winkel, d) in der Hypotenuse und einer Kathete, e) in beiden Katheten.

2) Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen a) in der Basis und einem der Winkel an derselben, b) in der Basis und dem Winkel an der Spitze, c) in einem Schenkel und einem der Winkel an der Basis, d) in einem Schenkel und dem Winkel an der Spitze, e) in einem Schenkel und der Basis.

3) Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.

4) Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn zwei der in 1 a)—e) angegebenen Bestimmungsstücke gegeben sind. (Zerlegung in 5 einzelne Aufgaben.)

5) Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren aus den in 2 a), so wie aus den in 2 b), 2 c), 2 d) angegebenen Stücken.

6) In jedem gleichschenkeligen Dreieck sind die aus den Endpunkten der Basis auf die Schenkel gefällten Senkrechten gleich. L. 22. 30, Zus.

7) In jedem gleichschenkeligen Dreieck sind die Halbirungslinien der Winkel an der Basis (bis zu den Schenkeln gerechnet) gleich. L. 22. 30.

8) Schneidet man auf den Schenkeln eines gleichschenkeligen Dreiecks von der Basis aus gleiche Stücke ab und verbindet die Endpunkte der letzteren mit dem je gegenüberliegenden Eckpunkt, so sind die Verbindungslinien gleich. L. 22. 31.

9) Schneidet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Eckpunkten aus beliebig lange, aber unter sich gleiche Stücke ab, so daß keine zwei Stücke an demselben Eckpunkte oder auf derselben Seite liegen, und verbindet

die Theilpunkte, so entsteht ein zweites gleichseitiges Dreieck. L. 22, Zus. L. 31. Zus. 1. Umkehrung. Zus. 2. Betragen die abgeschnittenen Stücke $^1/_3$ der ganzen Seite, so stehen die Seiten des zweiten Dreiecks zu den entsprechenden des ersten senkrecht. (Vergleiche den folgenden Satz 10.)

10) Ist in einem der rechtwinkeligen Dreiecke einer der spitzen Winkel doppelt so groß, als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groß, als die kleinere Kathete.

Beweis: Lege an das Dreieck ein congruentes mit der größeren Kathete an und zeige, daß ein gleichseitiges Dreieck entsteht.

Zwei Umkehrungen dieses Satzes zu bilden und zu beweisen.

11) Verlängert man einen Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks über die Basis um eine beliebige Strecke, schneidet auf dem andern Schenkel von der Basis aus eine gleiche Strecke ab und verbindet die Endpunkte der abgetragenen Stücke mit einander, so wird die Verbindungslinie durch die Basis halbirt. — (Beweis durch eine Parallele zu dem einen Schenkel.)

12) Fällt man von zwei Eckpunkten eines Dreiecks Perpendikel auf die zwischen ihnen liegende seitenhalbirende Transversale, so sind dieselben einander gleich. L. 30.

13) Verbindet man zwei beliebige Punkte zweier paralleler Linien mit einander und halbirt die Verbindungslinie, so wird jede durch den Halbirungspunkt zwischen den Parallelen gezogene Gerade in demselben halbirt. L. 30.

Aufgaben zu § 16.

1) Einen gegebenen Winkel zu verdoppeln. Aufg. 6.

2) Einen gegebenen Winkel zu verdreifachen. Aufg. 6.

3) Zu zwei aus einem Dreieck gegebenen Winkeln den dritten zu construiren. Aufg. 6. L. 20.

4) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet. Aufg. 6. 7.

5) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, so daß sie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleiche Stücke abschneidet. Aufg. 7.

6) In ein gleichseitiges Dreieck ein zweites so zu construiren, daß eine Ecke des letzteren in einen auf einer Seite des ersteren gegebenen Punkt fällt. Vgl. Uebungssatz 9.

7) Ein Dreieck zu construiren, von welchem zwei Winkel gegeben sind, so daß eine Seite desselben einer gegebenen Geraden parallel sei und seine Seiten einzeln durch je einen Eckpunkt eines gegebenen Dreiecks gehen. Aufg. 7, 6, 6, 7, 7.

8) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein zweites so zu zeichnen, daß die Seiten des letzteren einzeln auf denen des ersteren senkrecht stehen. Vgl. Uebungssatz 9, Zus. 2.

§ 17. Unmittelbare Folgerungen aus der Congruenz der Dreiecke.

Lehrsatz 34. Halbirt man in einem gleichschenkeligen Dreieck den Winkel an der Spitze, so steht die Halbirungslinie senkrecht zur Basis und halbirt dieselbe.

Beweis: L. 31 oder L. 22. 30.

Zusatz 1. (Umkehrung 1.) Verbindet man die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie, so steht die Verbindungslinie senkrecht zur Grundlinie und halbirt den Winkel an der Spitze.

Beweis: L. 33 oder L. 22. 31.

Zusatz 2. (Umkehrung 2.) Fällt man von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks eine Senkrechte auf die Grundlinie, so halbirt dieselbe die Grundlinie und den Winkel an der Spitze. Bew. L. 32 oder L. 30, Zus.

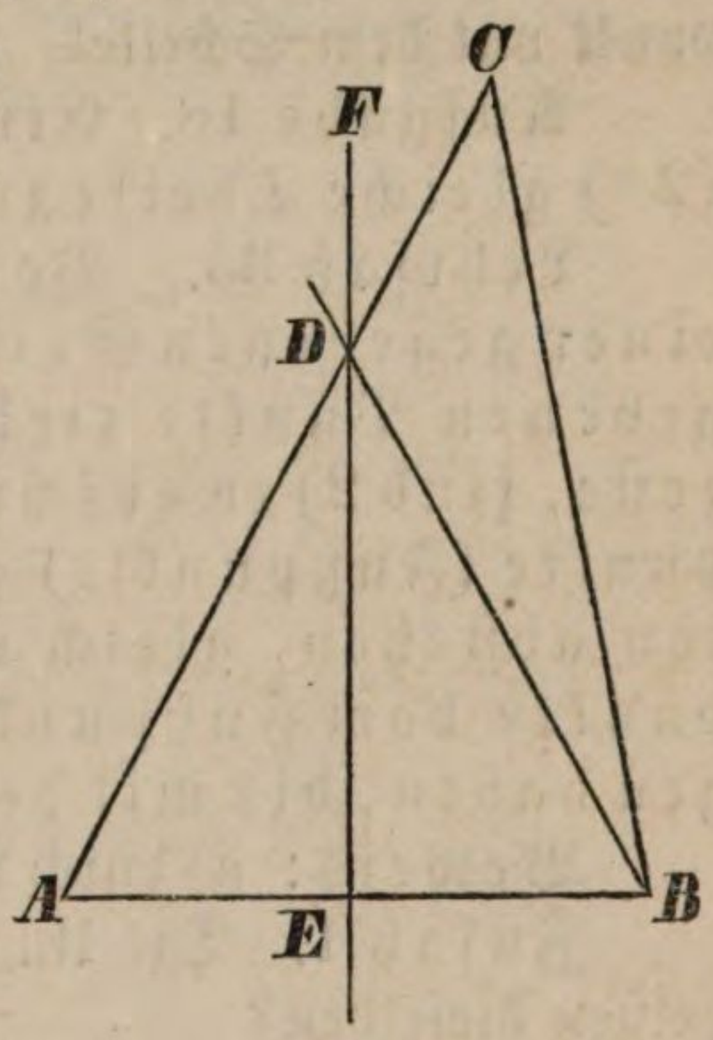
Zusatz 3. (Umkehrung 3.) Errichtet man auf der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks in ihrer Mitte eine Senkrechte, so geht dieselbe durch die Spitze und halbirt den Winkel an derselben. Beweis indirect. Zus. 1.

Frage: In welcher Weise erleiden diese Sätze Anwendung auf gleichseitige Dreiecke?

Zusatz 4. Errichtet man über einer und derselben Grundlinie beliebig viele gleichschenkelige Dreiecke, so liegen die Spitzen derselben in einer geraden Linie. Diese Linie steht zu der Grundlinie in deren Mitte senkrecht.

Aufgabe 12. Einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen hat.

Discussion der Aufgabe: Dieselbe hat unzählige Auflösungen, es genügen ihr alle Punkte einer Linie, nämlich der auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte in ihrer Mitte errichteten Senkrechten. Außerhalb dieser Linie giebt es keinen der Aufgabe genügenden Punkt, denn sind A, B die beiden gegebenen Punkte, ist ferner FE auf AB in ihrer Mitte E senkrecht und C ein außerhalb FE liegender Punkt, so verbinde man C mit den Punkten A und B. Eine der Verbindungslinien muß dann FE in einem Punkte D schneiden, und zieht man noch DB, so ist $DA = DB$, also $\sphericalangle DAB = DBA$, also $\sphericalangle CBA > DAB$, also $AC > BA$ (L. 25).



Erklärung: Eine Aufgabe, welche unzählige Auflösungen zuläßt, heißt eine unbestimmte. Erhält man bei einer Aufgabe statt eines gesuchten Punktes eine (gerade oder krumme) Linie, von welcher jeder Punkt der Aufgabe genügt, so heißt diese Linie der geometrische Ort des gesuchten Punktes.

Welches ist somit der geometrische Ort eines von zwei Punkten gleichweit entfernten Punktes?

Anmerkung: Die vorstehende Aufgabe fällt zusammen mit der folgenden: Den geometrischen Ort der Spitzen aller gleichschenkeligen Dreiecke zu bestimmen, welche eine gegebene, ihnen allen gemeinschaftliche Grundlinie haben.

Aufgabe 13. Eine gegebene Strecke zu halbiren.

Construction mittelst zweier über ihr errichteten gleichschenkeligen Dreiecke. L. 33, 34.

Aufgabe 14. Eine gegebene Strecke in 4, oder 8, oder 16 u. s. w. (2^n) gleiche Theile zu theilen.

Aufgabe 15. Auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte derselben eine Senkrechte zu errichten.

Construction: Trage auf der gegebenen Geraden vom gegebenen Punkte aus nach beiden Seiten desselben gleiche Strecken ab. § 16, A. 2.

Aufgabe 16. Auf eine gegebene Gerade AB von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte C aus eine Senkrechte zu fällen.

Construction: Verbinde C mit einem beliebigen Punkte D von AB, beschreibe um C mit CD als Radius einen Kreis. A. 2 in § 16.

Anmerkung. Eine praktisch bequeme Lösung der beiden vorstehenden Aufgaben ergiebt die Anwendung eines rechtwinkeligen Lineals. — Prüfung desselben. Anwendung von A. 16 und 15 zur Construction paralleler Linien (A. 7) nach L. 12.

Aufgabe 17. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Construction: Trage auf den Schenkeln vom Scheitel aus gleiche Stücke ab, beschreibe um deren Endpunkte mit demselben Radius je einen Kreisbogen, so daß letztere sich schneiden und verbinde den Durchschnittspunkt mit dem Scheitel. Bew. L. 33.

Aufgabe 18. Einen gegebenen Winkel in 4, 8, 16, u. s. w. (2^n) gleiche Theile zu theilen.

Lehrsatz 35. Von allen geraden Linien, die man nach einer gegebenen Geraden von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte ziehen kann, ist 1) die Senkrechte die kürzeste, sind 2) zwei schiefe, deren auf der Gerade liegende Endpunkte (Fußpunkte) gleich weit vom Fußpunkt der Senkrechten abstehen, gleich und ist 3) von zwei schiefen, deren Fußpunkte vom Fußpunkt der Senkrechten ungleiche Entfernungen haben, die mit der größeren Entfernung die größere.

Beweis: a) durch L. 25, Zus. 2. b) L. 31. c) L. 19, Zus. 1) L. 25.

Zusatz 1. Die Umkehrungen des Satzes 35 gelten ebenfalls. Wie heißen dieselben?

Zusatz 2. Von einem Punkte lassen sich nach einer Geraden stets zwei und nur zwei gleich lange Linien ziehen.

Zusatz 3. Dieselben bilden mit der Senkrechten gleiche Winkel, und es sind auch die Winkel, die sie mit der Geraden bilden, gleich, und umgekehrt.

Welche analoge Sätze gelten über zwei ungleiche schiefe Linien?

Erklärung: Unter Entfernung oder Abstand eines Punktes von einer Geraden versteht man die kürzeste aller Linien, die sich von ihm nach der Geraden ziehen lassen, also die von ihm auf letztere gefällte Senkrechte.

Lehrsatz 36. Jeder Punkt der Halbirungslinie eines Winkels ist von den Schenkeln desselben gleichweit entfernt. Bew. L. 30, Zus.

Zusatz: Jeder Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels, der von denselben gleich weit entfernt ist, liegt auf der Halbirungslinie des Winkels.

Aufgabe 19. Den geometrischen Ort eines von zwei gegebenen sich schneidenden Linien gleich weit entfernten Punktes zu bestimmen.

Derselbe wird von zwei Linien gebildet. Welche Lage haben diese gegen einander?

Sätze und Aufgaben zu § 17.

1) Ist das von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks auf seine Grundlinie gefällte Perpendikel gleich der Hälfte der Grundlinie, so ist der Winkel an der Spitze ein rechter, und umgekehrt. L. 34, Zus. 2, L. 22. L. 20.

2) Halbirt in einem Dreieck eine von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite gefällte Senkrechte diese Seite, so ist das Dreieck gleichschenkelig (L. 31). Welche Seiten sind die Schenkel? Dieselbe Behauptung gilt, wenn 3) die Senkrechte den Winkel an dem Eckpunkt, von dem sie ausgeht, halbirt (L. 30), oder wenn 4) die Halbirungslinie eines Winkels senkrecht zur gegenüberliegenden Seite steht (L. 30), oder wenn 5) die Linie, welche einen Eckpunkt mit dem Halbirungspunkt der gegenüberliegenden Seite verbindet, zu letzterer senkrecht steht (L. 31), oder wenn 6) die auf einer Seite in ihrer Mitte errichtete Senkrechte durch den gegenüberliegenden Eckpunkt geht.

7) Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, so daß seine Spitze in einem gegebenen Punkte und seine Grundlinie auf einer gegebenen Geraden liege, wenn außerdem die Länge der Grundlinie gegeben ist. A. 16. A. 13. — L. 31.

8) In einem gegebenen Dreieck zu einer Seite eine Parallele zwischen den anderen Seiten zu ziehen, so daß sie der Summe der der ersteren Seite anliegenden Abschnitte der beiden letzteren gleich sei.

Analyse. Man nehme an, die Linie sei gefunden und theile sie in zwei den getrennten Abschnitten einzeln gleiche Theile. A. 17. L. 9. L. 24.

9) In einem gegebenen Dreieck eine Parallele zu einer Seite zwischen den beiden anderen zu ziehen, so daß dieselbe gleich der Differenz der beiden Abschnitte der letzteren Seite sei, welche der ersteren anliegen.

Analyse ähnlich wie vorher.

10) Zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen, so daß die Summe der von zwei gegebenen Punkten auf dieselbe gefällten Perpendikel gleich einer gegebenen Linie sei.

Analyse. Verlängere das eine Perpendikel über seinen Fußpunkt um die Länge des anderen. A. 13, 7. L. 30 Zus.

11) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen. A. 3. A. 17.

12) Einen Winkel von 15 Grad zu construiren. A. 4. A. 18.

13) Auf einer Seite eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, der von den beiden anderen Seiten desselben gleich weit entfernt ist. A. 17. A. 19.

14) Einen Punkt zu construiren, der von drei gegebenen sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt ist. A. 19. Vier Punkte. Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn zwei der Geraden einander parallel sind?

Ein rechtwinkeliges Dreieck aus folgenden Stücken zu construiren:

15) aus der Summe der Katheten und aus der Hypotenuse,
16) der Summe der Katheten und einem spitzen Winkel,
17) der Summe der Hypotenuse und einer Kathete und aus der anderen Kathete,
18) der Summe der Hypotenuse und einer Kathete und aus einem spitzen Winkel,
19) der Differenz der Katheten und aus der Hypotenuse,
20) der Differenz der Katheten und einem spitzen Winkel,
21) der Differenz der Hypotenuse und einer Kathete und aus der anderen Kathete,
22) der Differenz der Hypotenuse und einer Kathete und einem spitzen Winkel,
23) der Summe der drei Seiten und einem spitzen Winkel,
24) der Höhe auf die Hypotenuse und einer Kathete,
25) der Höhe auf die Hypotenuse und einem Abschnitt der letzteren,
26) der Höhe auf die Hypotenuse und einem spitzen Winkel.

In einem Dreieck ABC seien A, B, C die Winkel, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, ferner $h_{a'}$, $h_{b'}$, h_c bezw. die auf a, b, c senkrechten Höhen; man construire das Dreieck aus folgenden Stücken: 27) $b + c$, a, A. 28) $b + c$, A, B. 29) $b + c$, $h_{c'}$, B. 30) $b - a$, c, A. 31) $b - a$, c, C. 32) $b - a$, c, $h_{b'}$. 33) $a + b$, $B - A$, C. 34) $a + b + c$, A, B. 35) $a + b + c$, $A - B$, C. 36) $a + b + c$, $h_{c'}$, B. 37) $a + c - b$, A, B. 38) $a + c - b$, $h_{c'}$, A. 39) a, $h_{b'}$, h_c. 40) $h_{c'}$, A, B. 41) $a + h_{c'}$, B, b. 42) $a - h_{c'}$, B, A. 43) a, h_c und der Differenz der von h_c auf c gebildeten Abschnitte. 44) C, h_c und der den Winkel C halbirenden Transversale. 45) $a + h_{c'}$, B und der Differenz der von h_c auf c gebildeten Abschnitte.

Bemerkung zu den Aufgaben 15—45: Zur Analyse construire man eine vorläufig als richtig geltende Figur und zu dieser ein Dreieck, welches die gegebenen Stücke oder doch solche, die sich aus ihnen leicht ableiten lassen, enthält, und welches aus diesen Stücken nach A. 1 und 8—11 construirt werden kann. Aus diesem Hülfsdreieck construire man das gesuchte.

§ 18. Nichtcongruenz der Dreiecke.

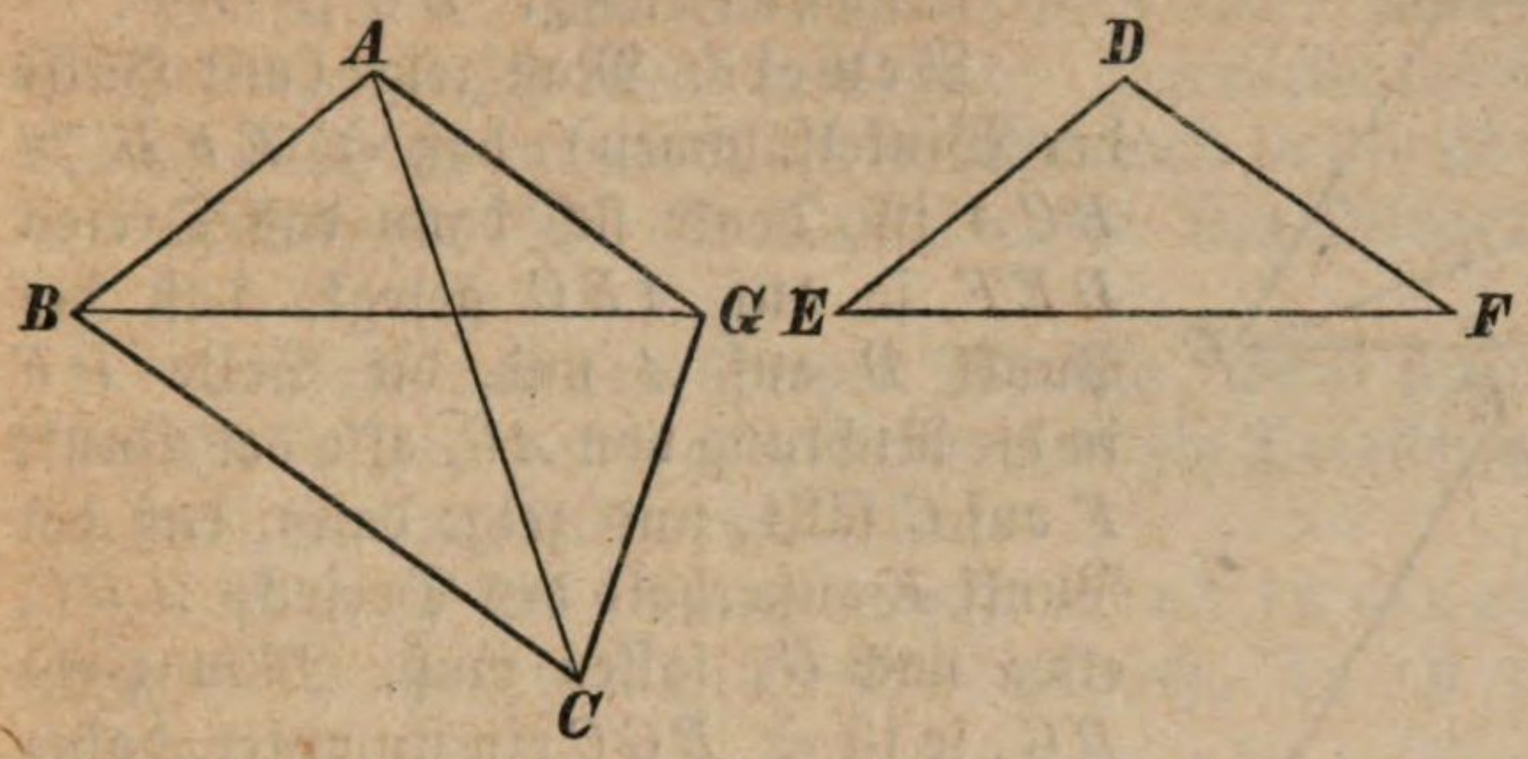
Lehrsatz 37. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zweien Seiten eines andern gleich, die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel aber nicht gleich, so ist die dritte Seite in demjenigen Dreieck größer, als im anderen, welches den größeren eingeschlossenen Winkel hat.

Voraussetzung: $AB = DE$, $BC = EF$, $\sphericalangle ABC > DEF$.

Behauptung: $AC > DF$.

Beweis: Man denke sich das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC gelegt, daß der Punkt D auf A und DE in die Richtung von AB fällt. Dann fällt der Punkt E auf B (warum?), dagegen EF innerhalb des Winkels ABC (warum?) und der Punkt F nach G. Zieht man nun CG, so ist wegen $BG = BC$, $\sphericalangle BGC = BCG$, daher $\sphericalangle AGC > BCG$,

und um so mehr $\sphericalangle AGC > ACG$, also auch $AC > AG$ (L. 25), oder $AC > DF$.



Lehrsatz 38. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zwei Seiten eines anderen gleich, die dritten Seiten dieser Dreiecke aber ungleich, so ist der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in dem Dreieck, welches die größere dritte Seite hat, größer als in dem anderen.

Beweis indirect.

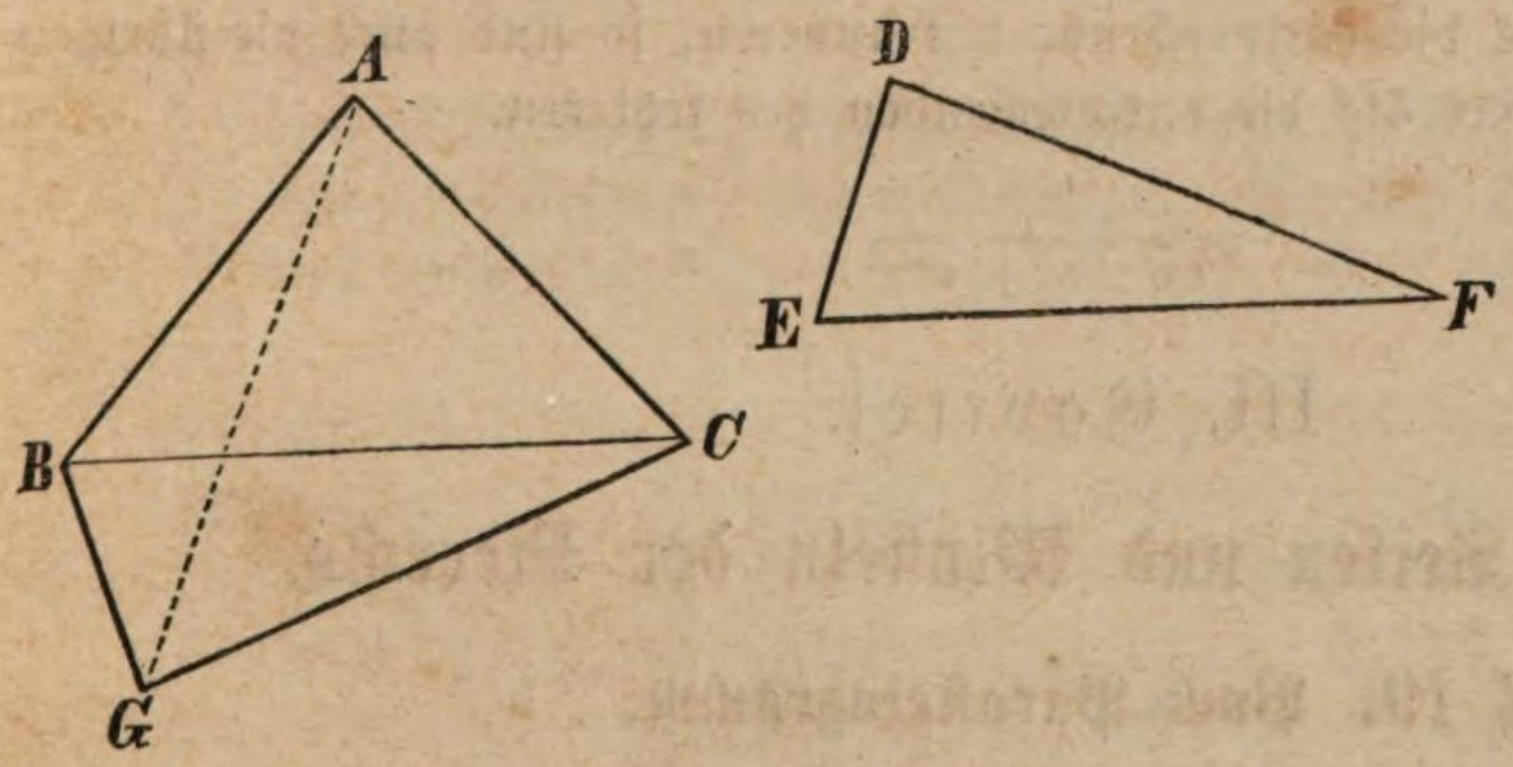
Lehrsatz 39. Ist eine Seite eines Dreiecks einer Seite eines anderen und sind die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich, ist dagegen eine andere Seite des ersteren Dreiecks größer als eine andere des letzteren, so ist die dritte Seite des ersteren kleiner als die dritte Seite des letzteren.

Voraussetzung: $BC = EF$, $\sphericalangle BAC = EDF$.

$AC < DF$.

Behauptung: $AB > ED$.

Beweis: Man denke sich das Dreieck DEF so neben das Dreieck ABC gelegt, daß der Punkt E auf B und EF in die Richtung von BC, also der Punkt F auf C und D nach G fällt, und ziehe AG, so ist, da $AC < CG$ ist, $\sphericalangle AGC < GAC$. Da aber $\sphericalangle BAC = BGC$ ist nach

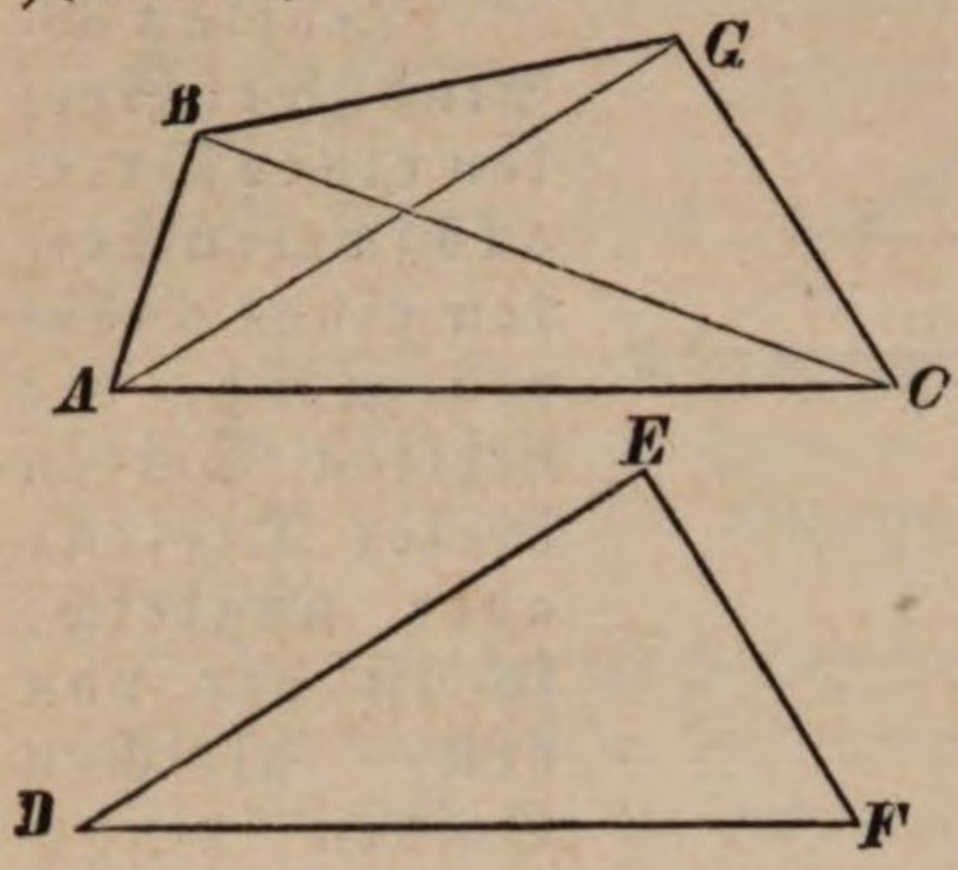


Voraussetzung, so ist also $\sphericalangle BAG < BGA$, also $BG < AB$.

Zusatz: Haben zwei rechtwinkelige Dreiecke gleiche Hypotenusen und ist eine Kathete des einen Dreiecks größer als eine Kathete des anderen, so ist die zweite Kathete des ersteren Dreiecks größer als die zweite Kathete des letzteren.

Lehrsatz 40. Haben zwei rechtwinkelige Dreiecke gleiche Hypotenusen und ist ein Winkel des einen Dreiecks größer als ein Winkel des anderen, so liegt dem größeren Winkel eine größere Seite gegenüber.

Voraussetzung: $AC = DF$, $\sphericalangle ABC = DEF = R$, $\sphericalangle BAC > EDF$.



Behauptung. $BC > EF$.

Beweis. Man zeige (mit Hülfe der Winkelsummen), daß $\sphericalangle EFD > BCA$ ist, denke sich dann das Dreieck DEF so auf ABC gelegt, daß der Punkt D auf A und die Seite DF in die Richtung von AC, also der Punkt F auf C fällt, und zeige dann, daß der Punkt E außerhalb des Dreiecks ABC, etwa nach G, fallen muß. Man ziehe BG, so ist $\sphericalangle BGC$ ein stumpfer, daher $BC > GC$.

Bemerkung: Die Nichtcongruenz der Dreiecke bietet eine größere Anzahl einzelner Sätze, als die Congruenz; die vorstehenden sind diejenigen derselben, welche in der Folge Anwendung finden. Zur Uebung kann die Aufsuchung der Beweise der nachstehend noch genannten dienen.

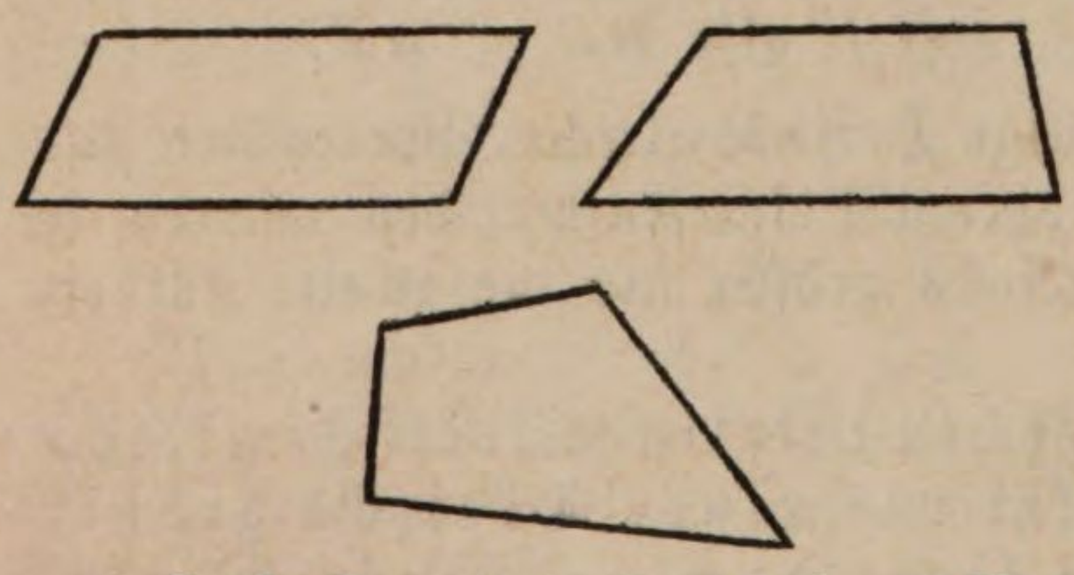
Sätze zu § 18:

1) Stimmen zwei Dreiecke überein in einer Seite und einem ihr anliegenden Winkel, dagegen nicht in den anderen anliegenden Winkeln, so liegt dem größeren Winkel eine größere Seite gegenüber. Die dritte Seite kann gleichwohl in beiden Dreiecken gleich sein. — 2) Stimmen zwei Dreiecke überein in einem Winkel und einer ihm anliegenden Seite, dagegen nicht in der anderen anliegenden Seite, so liegt der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüber. — 3) Stimmen zwei Dreiecke überein in den drei Winkeln, ist aber eine Seite des einen Dreiecks größer als die entsprechende des anderen, so sind auch die übrigen Seiten des ersteren größer als die entsprechenden des letzteren. —

III. Capitel.

Von den Seiten und Winkeln der Vierecke.

§ 19. Vom Parallelogramm.



Erklärung: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem jede zwei Gegenseiten parallel sind, ein Trapez ist ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten parallel sind, ein Trapezoid ist ein Viereck, in welchem keine Seiten einander parallel sind.

Lehrsatz 41. In jedem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Beweis: Sie geben mit demselben dritten Winkel gleiche Summen. L. 9.

Zusatz 1. Durch einen Winkel eines Parallelogrammes sind die übrigen der Größe nach bestimmt. Parallelogramme, welche in einem Winkel übereinstimmen, stimmen daher auch in den übrigen Winkeln überein.

Zusatz 2. Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein Rechter, so sind auch die anderen Rechte.

Was gilt von den übrigen Winkeln, wenn einer ein schiefer ist?

Erklärung: Daher kann man die Parallelogramme in rechtwinkelige und schiefwinkelige eintheilen.

Lehrsatz 42. (Umkehrung.) Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis: L. 21, Zus. — L. 7, Zus.

Lehrsatz 43. Jede Diagonale eines Parallelogramms theilt dasselbe in zwei congruente Dreiecke.

Beweis: L. 9. L. 30.

Zusatz 1. In jedem Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten einander gleich.

Oder: Parallele Linien zwischen parallelen sind gleich.

Zusatz 2. Zwei parallele Linien sind überall gleichweit von einander entfernt.

Zusatz 3. Sind in einem Parallelogramm zwei aneinanderstoßende Seiten einander gleich, so sind es alle vier.

Erklärung: Daher kann man die Parallelogramme in gleichseitige und ungleichseitige eintheilen. Durch Verbindung dieser Eintheilung mit der früheren nach den Winkeln erhält man vier Arten von Parallelogrammen; dieselben sind:

1) das gleichseitige, rechtwinkelige, oder das Quadrat,

2) das gleichseitige, schiefwinkelige, oder der Rhombus (die Raute),

3) das ungleichseitige, rechtwinkelige, oder das Rechteck (das Oblongum),

4) das ungleichseitige, schiefwinkelige, oder das Rhomboid.

Lehrsatz 44. (Umkehrung 1.) Sind in einem Vierecke je zwei Gegenseiten gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis: Man ziehe eine Diagonale. L. 33. L. 7.

Lehrsatz 45. (Umkehrung 2.) Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis: Man ziehe eine Diagonale. L. 9. L. 31. L. 7.

* Lehrsatz 46. In jedem Parallelogramm halbiren die Diagonalen einander.

Beweis: L. 9. L. 30.

* Lehrsatz 47. Halbiren in einem Viereck die Diagonalen einander, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis: L. 31. L. 7.

Zusatz: Jede durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines

Parallelogramms zwischen zwei Gegenseiten desselben (oder deren Verlängerungen) gezogene Gerade wird in diesem Punkte halbirt.

*Lehrsatz 48. In jedem rechtwinkeligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich.

Beweis: L. 31.

*Lehrsatz 49. Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich, so ist dasselbe rechtwinkelig.

Beweis: L. 33. L. 9c.

*Lehrsatz 50. In jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen senkrecht zu einander und halbiren die Winkel.

Beweis: L. 46. L. 34, Zus. 1.

*Lehrsatz 51. Stehen in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht zu einander, so ist dasselbe gleichseitig.

Beweis: L. 46. L. 31.

Frage: Welche andere Umkehrung kann man zu dem Lehrs. 50 bilden?

Lehrsatz 52. Parallelogramme sind congruent, wenn sie in zwei aneinanderstoßenden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Beweis: Durch Deckung, oder durch den Nachweis der Gleichheit je zweier homologer Stücke.

Zusatz: Zwei Rhomben sind congruent, wenn sie in einer Seite und einem Winkel, zwei Rechtecke, wenn sie in zwei aneinanderstoßenden Seiten, zwei Quadrate, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.

Sätze zu § 19.

1) In jedem schiefwinkeligen Parallelogramme liegt den stumpfen Winkeln eine größere Diagonale gegenüber, als den spitzen. L. 37. — 2) Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen ungleich, so ist dasselbe schiefwinkelig. L. 38. — 3) Die Fußpunkte der vom Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Rhombus auf die Seiten gefällten Senkrechten bilden die Eckpunkte eines Rechtecks. L. 50. 30. 47. 49. — 4) Die Halbirungspunkte der Seiten eines Parallelogramms bilden die Eckpunkte eines neuen Parallelogramms. Ist das erstere ein Rechteck, so ist das letztere ein Rhombus; ist das erstere ein Rhombus, so ist das letztere ein Rechteck; ist das erstere ein Quadrat, so ist das letztere auch ein Quadrat. — Beide Parallelogramme haben denselben Durchschnittspunkt der Diagonalen. L. 31. 44. 31. 22. — 5) Schneidet man von den Eckpunkten eines Parallelogramms aus auf den Seiten gleichmäßig gleiche Stücke ab (so daß keine zwei gleichen Stücke an demselben Eckpunkt oder auf derselben Seite liegen), so bilden die Endpunkte der abgetragenen Stücke die Eckpunkte eines neuen Parallelogramms. L. 31. 44. — War das erstere ein Quadrat, so ist das letztere auch ein Quadrat. — 6) Die Halbirungslinien der vier Winkel eines Parallelogramms schließen ein Rechteck ein. — Derselbe Satz gilt von den Halbirungslinien der Außenwinkel L. 20. 42. — 7) Verbindet man die Halbirungspunkte zweier Gegenseiten eines Parallelogramms mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird dadurch die andere Diagonale in drei gleiche Theile getheilt. Bew. mittelst einer Parallelen zu letzterer Diagonale. —

8) Zieht man in einem gleichschenkeligen Dreieck von einem beliebigen Punkte der Grundlinie parallele Linien zu den Schenkeln, so ist die Summe derselben gleich einem Schenkel. L. 43, Zus. 1. L. 9. 22. 24.

9) Fällt man von einem beliebigen Punkte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks auf jeden Schenkel eine Senkrechte, so ist die Summe derselben gleich der auf einem Schenkel stehenden Höhe des Dreiecks.

Beweis: Ziehe durch den Punkt eine Parallele zu einem Schenkel. L. 30, Zus., L. 43, Zus. 1.

Aufgaben zu § 19.

Ein Quadrat zu zeichnen aus

1) einer Seite a, 2) dem Umfang u, 3) einer Diagonale d.

Ein Rechteck zu zeichnen aus

4) zwei ungleichen Seiten a, b, 5) einer Seite a und einer Diagonale d, 6) einer Seite a und dem Winkel φ der Diagonalen, 7) d und φ, 8) a und dem Winlel γ zwischen a und d, 9) b und γ.

Einen Rhombus zu zeichnen aus

10) einer Seite a und einem Winkel α, 11) a und einer Diagonale d, 12) d und α, 13) aus den beiden Diagonalen.

Ein Rhomboid zu zeichnen aus

14) zwei ungleichen Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel α, 15) a, b und einer Diagonale d, 16) a, d, α, 17) a und den beiden Diagonalen d , d_2, 18) d_1, d_2, $\sphericalangle (a, d_1)$, 19) d_1, d_2 und dem Winkel φ der Diagonalen, 20) a, $\sphericalangle (a, d_1)$, φ, 21) a, d_1, φ.

Ein Parallelogramm zu zeichnen aus

22) a, b und der Höhe*) h_b auf b, 23) b, h_b, d_1, 24) d_1, h_b, α, 25) d_1, d_2, h_b, 26) a und den beiden Höhen h_a, h_b, 27) a, d_1, h_b. 28) Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, der von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat. (Zwei Linien!) — 29) Den geometrischen Ort der Endpunkte aller Geraden von gegebener Länge zu bestimmen, die von Punkten einer gegebenen Geraden aus auf derselben Seite dieser letzteren und unter einem gegebenen Winkel gegen dieselbe gezogen werden können. —

Eine Linie von gegebener Länge zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels so einzutragen, daß sie

30) auf einem Schenkel senkrecht steht; — 31) von beiden Schenkeln gleiche Stücke abschneidet; — 32) einer gegebenen Geraden parallel ist.

33) Zwischen zwei gegebene parallele Linien eine Gerade von gegebener Länge so einzutragen, daß sie durch einen gegebenen Punkt geht. (Drei verschiedene Lagen des Punktes.)

34) Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade so zu ziehen, daß dieselbe von den beiden anderen Punkten gleichweit absteht.

35) In ein Quadrat ein zweites zu construiren, so daß eine Ecke des letzteren in einem auf einer Seite des ersteren gegebenen Punkt liegt. —

---

*) D. i. der Abstand zweier Gegenseiten.

In ein Dreieck einen Rhombus zu beschreiben, so daß

36) derselbe einen Winkel mit dem Dreieck gemeinsam hat, 37) eine Seite des Rhombus auf eine Seite des Dreiecks und ein Eckpunkt des Rhombus auf einen in einer anderen Seite des Dreiecks gegebenen Punkt fällt.

38) In ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, so daß eine Ecke des letzteren in eine Ecke des ersteren und die beiden übrigen auf zwei Seiten des Quadrats fallen. — 39) In ein gegebenes Dreieck ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn der Durchschnittspunkt der Diagonalen der Lage nach gegeben ist.

40) Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels eine Gerade so zu ziehen, daß sie in diesem Punkt halbirt werde.

Analyse. Ziehe durch den Punkt eine Parallele zu einem Schenkel. L. 7 Zus. 30. 43, Zus. 1. Oder L. 46.

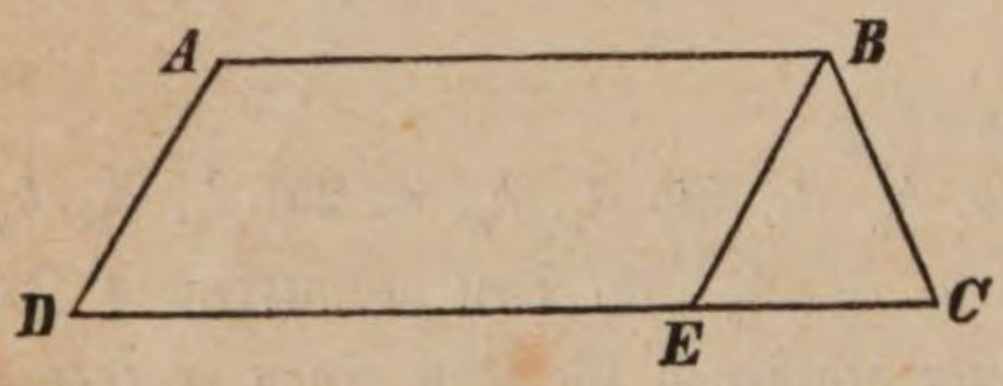
41) Durch einen außerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade nach dem einen Schenkel des letzteren so zu ziehen, daß sie von dem anderen Schenkel halbirt werde. —

Construction ähnlich wie bei 40. — A. 7. L. 46.

§ 20. Vom Trapez.

Erklärung: Ein Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten gleich lang sind, heißt ein gleichschenkeliges. (Antiparallelogramm.)

* Lehrsatz 53. In jedem gleichschenkeligen Trapez sind je zwei Winkel an einer der parallelen Seiten einander gleich.



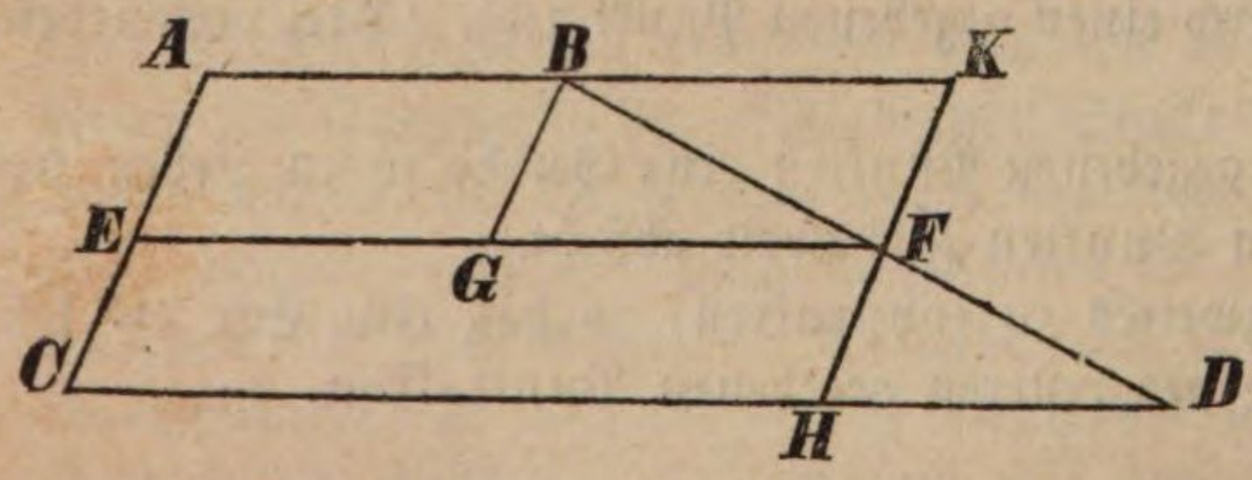
Beweis: Ist $AB \parallel DC$, $AD = BC$, so ziehe man $BE \parallel AD$, zeige, daß $BE = AD = BC$ und daher $\sphericalangle BEC = BCE = ADE$ ist. Ferner ist $\sphericalangle DAB = CBA$. L. 9.

* Lehrsatz 54. In jedem gleichschenkeligen Trapez sind die Diagonalen gleich.

Beweis: L. 53. L. 31.

* Lehrsatz 55. Jedes gleichschenkelige Trapez wird durch die Diagonalen in vier Dreiecke getheilt, wovon die an den nichtparallelen Seiten liegenden einander congruent, die an den parallelen Seiten gleichschenkelig sind.

Lehrsatz 56. Halbirt man eine der nicht parallelen Seiten eines Trapezes und zieht durch den Halbirungspunkt eine Parallele zu den parallelen Seiten, so halbirt diese auch die andere der nicht parallelen Seiten.



Voraussetzung: $AB \parallel CD$, $AE = CE$, $EF \parallel AB$.

Behauptung: $BF = FD$.

Beweis: Man ziehe BG und FH parallel zu AC und beweise die

Congruenz der Dreiecke BGF und FHD. — Oder man ziehe durch F eine Parallele zu AC, verlängere AB, bis sie diese Parallele in K schneidet und beweise die Congruenz der Dreiecke BFK und FHD.

Lehrsatz 57. (Umkehrung.) Halbirt man in einem Trapez die beiden nicht parallelen Seiten und verbindet die Halbirungspunkte mit einander, so ist die Verbindungslinie den parallelen Seiten parallel.

Beweis: Man construire wie vorher $KH \parallel AC$, beweise, daß $\triangle BFK \cong DHF$ (L. 30), daher $FK = FH$ ist. Nun ist $KH = AC$ (L. 43, Zus. 1), also $KF = AE$, daher (L. 45) $EF \parallel AK$.

Erklärung: Die Verbindungslinie der Halbirungspunkte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes heißt die Mittellinie desselben.

Lehrsatz 58. Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der Hälfte der Summe der parallelen Seiten desselben (gleich dem arithmetischen Mittel aus den parallelen Seiten).

Beweis: Man construire wie vorher $KH \parallel AC$, und beweise, daß $\triangle BFK \cong DFH$, also $BK = HD$ ist. Dann ist $EF = AK$ und $EF = CH$, also $2EF = AK + CH = AB + BK + CD - HD = AB + CD$, also $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

*Zusatz 1. Zieht man durch den Halbirungspunkt einer Seite eines Dreiecks eine Parallele zu einer anderen Seite, so wird durch dieselbe die dritte Seite halbirt.

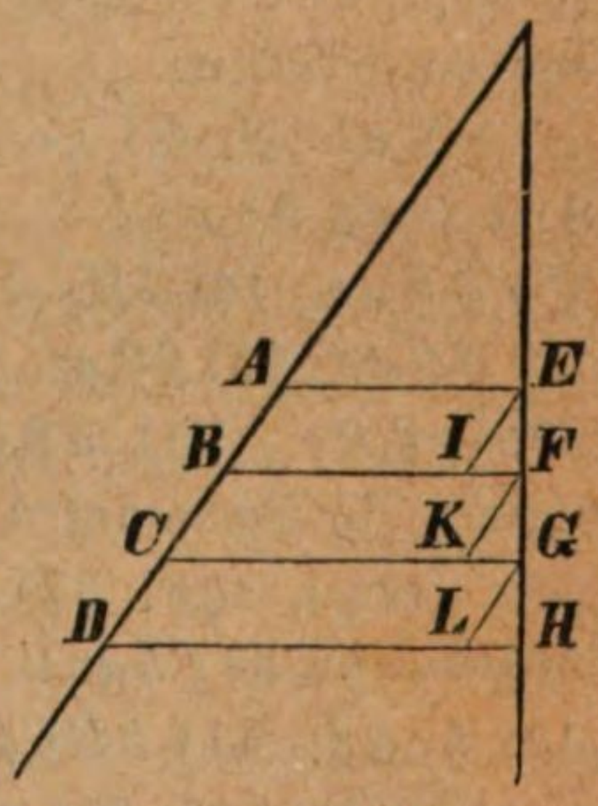
*Zusatz 2. Verbindet man die Halbirungspunkte zweier Seiten eines Dreiecks mit einander, so ist die Verbindungslinie der dritten Seite parallel. Die Verbindungslinie ist gleich der Hälfte der dritten Seite.

Lehrsatz 59. Sind auf einer Geraden mehrere gleich lange Strecken nach einander abgetragen und durch die Endpunkte derselben unter sich parallele Linien gezogen, so werden durch letztere auf jeder anderen sie schneidenden Geraden ebenfalls gleiche Strecken abgeschnitten.

Voraussetzung: $AB = BC = CD$, $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$.

Behauptung: $EF = FG = GH$.

Beweis: Ziehe durch E, F, G parallele Linien zu AD und beweise die Congruenz der entstandenen Dreiecke EIF, FKG, u. s. w. L. 43, Zus. 1. L. 9. L. 30.



Aufgabe 20. Eine gegebene Strecke in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Construction: Man lege an die gegebene Strecke in ihrem einen Endpunkt eine Linie unter einem beliebigen hohlen Winkel an, trage auf derselben eine beliebige Strecke so oft hinter einander ab, als die verlangte Anzahl beträgt und benutze die Construction des L. 59.

Sätze zu § 20.

1) Sind in einem Trapez die an einer der parallelen Seiten liegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein gleichschenkeliges Trapez. L. 9. 24. 43, Zus. 1. 2) Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten einander gleich und bildet jede der beiden anderen Seiten mit den ersteren gleiche Winkel, so sind die beiden anderen Seiten parallel. L. 9. 24. 45. 3) Errichtet man auf einer der parallelen Seiten eines gleichschenkeligen Trapezes in ihrer Mitte eine Senkrechte, so halbirt diese die andere parallele Seite und geht durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen und durch den Durchschnittspunkt der nicht parallelen Seiten. L. 34, Zus. 3. 4) Die Verbindungslinie der Halbirungspunkte der parallelen Seiten eines gleichschenkeligen Trapezes steht senkrecht zu den parallelen Seiten und geht durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen.

5) Die Verbindungslinien der Halbirungspunkte je zweier benachbarter Seiten eines gleichschenkeligen Trapezes bilden einen Rhombus. L. 57. 56. 47. 31.

6) Die geraden Linien, welche die Halbirungspunkte der drei Seiten eines Dreiecks mit einander verbinden, theilen dasselbe in vier congruente Dreiecke. L. 58, Zus. 2. 43, Zus. 1. 33. 7) Parallele Linien, bei denen die Abstände je zweier benachbarten gleich groß sind, schneiden von jeder sie durchschneidenden Geraden gleiche Stücke ab und umgekehrt. L. 59. 8) Zieht man zwischen zwei Geraden beliebig viele Parallelen, welche von jeder der ersteren gleiche Stücke abschneiden, so ist jede folgende Parallele um ein gleiches Stück länger als die vorhergehende. L. 43, Zus. 1. 30. 9) Zieht man zwischen zwei parallelen Linien eine beliebige Gerade, halbirt dieselbe und zieht durch den Halbirungspunkt eine Parallele zu den parallelen Linien, so halbirt erstere auch jede andere zwischen den letzteren gezogene Gerade. L. 56.

Aufgaben zu § 20.

In einem Trapez $ABCD$ bezeichne a die größere parallele Seite BC, b die kleinere AD, ferner sei $AB = c$, $DC = d$, $AC = e$, $BD = f$, h die Höhe (der Abstand der parallelen Seiten), A, B, C, D die Winkel des Trapezes, α der spitze Winkel der Diagonalen, $CBD = \beta$. Man construire ein Trapez aus folgenden Stücken:

1) $abcB$. 2) $acdA$. 3) $acBC$. 4) $abcf$. 5) $abeB$. 6) $abeC$. 7) $acfB$. 8) $cdeC$. 9) $aeBC$. 10) $aefB$. 11) βacd. 12) βace. 13) βacf. 14) βaef. 15) βBac. 16) βBad. 17) βBae. 18) βBce. 19) βCab. 20) βCac. 21) βCae. 22) βCde. 23) βCef. 24) βBCa. 25) βBCc. 26) βBCf. 27) $\alpha\beta ac$. 28) $\alpha\beta ae$. 29) $\alpha\beta Bc$. 30) $\alpha\beta Ba$. (Analyse durch Construction eines der Dreiecke, in welche die Diagonalen das Trapez zerlegen.)

Ferner aus: 31) $habc$. 32) $habe$. 33) $hab\beta$. 34) $hacd$. 35) $hacf$. 36) $hacC$. 37) $hac\alpha$. 38) $hcde$. 39) $haef$. 40) $hefB$. 41) $ha\alpha\beta$. 42) $hcC\beta$. 43) $hc\alpha\beta$. 44) $hBC\beta$.

Ferner aus: 45) $abcd$. 46) $abcC$. 47) $adBC$. 48) βBcd. 49) $a—b, c, d, \beta$. 50) $a — b, h, d, f$. (Analyse mittelst einer Geraden DF parallel zu AB.)

Ferner aus: 51) $abef$. 52) βabe. 53) αabf. 54) βcef. 55) βBef. 56) $\alpha\beta ce$. 57) $\alpha\beta cf$. 58) $\alpha\beta Bf$. 59) $aef\alpha$. 60) $a + b, e, f, c$. 61) $a + b, e, \beta, d$. (Analyse durch eine Linie CG parallel BD, oder DH parallel AC.)

Ferner aus: 62) $abBC$. 63) βBab. 64) $\alpha\beta ab$. (Aufg. 32 zu § 19.)
65) $b + d$, a, c, e. 66) $b + d$, e, f, D.
(Schwierigere Aufgaben.) 67) $c - d$, $a - b$, e, $C - B$. 68) $a + c + d - b$, e, B, C. 69) a, $e + f$, α, β. 70) $a + b + c + d$, h, A, C. (Vergl. § 17, Aufg. 27—45.)

71) Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade so zu ziehen, daß dieser Punkt von den Fußpunkten der beiden Senkrechten gleich weit abstehe, die man von den beiden anderen Punkten auf die Gerade fällen kann. A. 13. 15. L. 56, oder Uebungssatz 9.

Anhang 2. Congruenz der Vierecke und der Polygone.

1) Die Vierecke.

1) Sind von den Seiten und Winkeln eines Vierecks fünf Stücke gegeben — unter denen sich jedoch mindestens zwei Seiten befinden, so sind in der Regel auch die drei übrigen Stücke, und somit auch die Gestalt und Größe des Vierecks bestimmt. Vierecke, welche in fünf solchen — in beiden gleichartig liegenden — Bestimmungsstücken übereinstimmen, sind demnach einander congruent. Die einzelnen Fälle, welche hierbei vorkommen können, sind:

Die drei nicht gegebenen Stücke sind:

a) ein Winkel und zwei Seiten. Der fehlende Winkel ist durch die drei übrigen nach L. 21, Zus. bestimmt; die beiden Seiten liegen entweder aneinander (1. Fall), oder einander gegenüber (2. Fall).

b) zwei Winkel und eine Seite. Entweder liegen die beiden Winkel einander gegenüber (3. Fall), oder sie liegen aneinander, und dann ist die fehlende Seite entweder die von ihnen eingeschlossene (4. Fall), oder eine der nicht eingeschlossenen, anliegenden (5. Fall), oder die keinem der Winkel anliegende (6. Fall).

c) drei Winkel (7. Fall).

In den Fällen 1, 3, 4, 5, 7 kann man durch eine Diagonale ein Dreieck von dem Viereck abschneiden, von welchem die Bestimmungsstücke bekannt sind, und mit Hülfe dieses Dreiecks ergeben sich auch für das zweite drei Stücke, die aber in den Fällen 3 und 5 nicht zur vollständigen Bestimmung des zweiten Dreiecks hinreichen. Die für diese Fälle noch hinzuzufügende Bedingung ist leicht zu finden. Im zweiten Fall kann man durch Verlängerung der nicht gegebenen Seiten das Viereck als Differenz zweier durch je drei Stücke bestimmter Dreiecke darstellen; nur wenn die nicht gegebenen Seiten parallel sind, ist das Viereck nicht durch die gegebenen Stücke bestimmt. Wie kann man an den letzteren erkennen, ob dieser Fall stattfindet? — Im sechsten Falle endlich ist das Viereck ebenfalls nicht völlig bestimmt, sondern es können möglicherweise zwei Vierecke aus den gegebenen Stücken construirt werden. Eine Zerlegung des Vierecks durch eine Diagonale reicht hier (wie im 2. Falle) zur Analyse nicht hin; die Construction kann mittelst eines Kreisbogens und einer Parallelen ausgeführt werden, wobei sich auch die noch hinzuzufügende Bedingung leicht finden läßt. Oder man ziehe durch den Scheitelpunkt eines der nicht gegebenen Winkel zu jeder der gegenüberliegenden Seiten eine Parallele, wodurch das Viereck in zwei Dreiecke und ein Parallelogramm getheilt wird.

Der Beweis der Congruenz zweier Vierecke, welche in fünf Bestimmungs-

stücken übereinstimmen, kann auch durch Deckung, sei es der ganzen Vierecke, sei es der einzelnen Theile derselben geführt werden.

2) Sind die Vierecke Trapeze, so bedarf man nur vier Stücke zur Bestimmung desselben, da die Forderung, daß zwei Seiten parallel sind, eins derselben ersetzt. — Es können dann nicht zwei an derselben nicht parallelen Seite liegende Winkel zugleich als Bestimmungsstücke gegeben sein. — Zur Bestimmung eines Parallelogramms bedarf man nur dreier Stücke.

2) Die Polygone.

Jedes n-Eck ist im Allgemeinen durch $2n - 3$ Stücke von seinen $2n$ Seiten und Winkeln bestimmt, sofern die drei nicht gegebenen Stücke nicht sämmtlich Seiten sind. Zwei n-Ecke, welche in $2n - 3$ solchen Bestimmungsstücken übereinstimmen, sind also congruent. Die einzelnen Fälle sind folgende:

Die nicht gegebenen Stücke sind:

a) ein Winkel und zwei Seiten, in welchem Fall der fehlende Winkel aus den übrigen durch die Winkelsumme leicht gefunden, mithin gleichfalls als gegeben angesehen werden kann. Die fehlenden Seiten liegen entweder aneinander (1. Fall), oder sie liegen getrennt (2. Fall).

b) zwei Winkel und eine Seite. Hier sind folgende Fälle zu unterscheiden: 1) Die drei Stücke liegen aneinander, die beiden Winkel also der Seite an (3. Fall), 2) die zwei Winkel liegen zusammen, die fehlende Seite zwischen einem von ihnen und einem bekannten Winkel (4. Fall), 3) die drei Stücke liegen auf beliebige andere Weise (5. Fall).

c) drei Winkel. Entweder folgen dieselben auf einander (6. Fall), oder sie liegen sonst in beliebiger Weise (7. Fall).

Von diesen 7 Fällen läßt sich zunächst der dritte leicht behandeln, indem man nachweist, daß bei der Construction eines n-Ecks durch successives Aneinanderlegen der gegebenen Seiten und Winkel die letzte Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel sich von selbst ergeben, oder daß zwei n-Ecke, welche in $n - 1$ auf einander folgenden Seiten und den von diesen eingeschlossenen $n - 2$ Winkeln der Reihe nach übereinstimmen, sich zur Deckung bringen lassen.

Im 1., 4. und 6. Fall kann man das n-Eck durch eine Diagonale in ein nach dem dritten Fall bestimmtes $n - 1$-Eck und in ein Dreieck zerlegen, von welchem drei Stücke bestimmt sind. Diese letzteren bestimmen im 1. und 6. Fall (nach L. 30 und 33) das Dreieck, im 4. dagegen reichen sie (L. 32) nicht vollständig für diesen Zweck hin. Im 2. Fall verbinde man die Endpunkte der nicht gegebenen Seiten so mit einander, daß ein Viereck nebst einem oder zwei Polygonen (oder Dreiecken) entsteht, welche letztere nach dem dritten Fall (oder L. 31) bestimmt sind, während das Viereck durch die Winkel und zwei gegenüberliegende Seiten (2. Fall bei dem Viereck) bestimmt ist. Im fünften Fall verbinde man die Endpunkte der fehlenden Seite und die Scheitel der fehlenden Winkel mit einander, so daß ein Viereck entsteht, auf welches sich der — nicht völlig bestimmte — sechste Fall bei dem Vierecke anwenden läßt, während die übrigen Theile des Polygons nach dem dritten Falle (oder L. 31) bestimmt sind. Im siebenten Fall endlich verbinde man die Scheitel der drei fehlenden Winkel mit einander und zeige wieder, daß die einzelnen Theile der Figur durch die gegebenen Stücke bestimmt sind.

Die Congruenz zweier in $2n-3$ Bestimmungsstücken übereinstimmenden n-Ecke läßt sich hiernach leicht auf verschiedene Arten beweisen. Nimmt man außer den Seiten und Winkeln des Polygons auch die Diagonalen und die von diesen an den Eckpunkten gebildeten Winkel unter die Bestimmungsstücke auf, so läßt sich die Anzahl der vorstehenden Sätze noch erheblich mittelst verschiedener Constructionen von je $2n-3$ Bestimmungsstücken vermehren. (Man hat hierbei besonders darauf zu achten, daß die $2n-3$ Stücke von einander unabhängig sein müssen, d. h. daß keins derselben durch die übrigen oder einen Theil der übrigen $2n-4$ Stücke bestimmt sein darf.)

3) Aufgaben über das Viereck.

In einem Vierecke $ABCD$ seien die Winkel der Reihe nach durch A, B, C, D bezeichnet, und es sei $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, die Diagonale $AC=e$, $BD=f$, der Winkel $ABD=\alpha$, $BAC=\beta$, $BDC=\gamma$.

Man soll ein Viereck aus folgenden Stücken construiren: 1) $abABC$. 2) $acABC$. 3) $abcAC$. 4) $abdAB$. 5) $abcAB$. 6) $bcdAB$. 7) $abcdA$.

Ferner aus: 8) $abcdf$. 9) $abdfB$. 10) $acdfB$. 11) $adefB$. 12) $abcfA$. 13) $abfAB$. 14) $acfAB$. 15) $abefA$. 16) $aefAB$. 17) $abcA\alpha$. 18) $abAB\alpha$. 19) $acAB\alpha$. 20) $abcA\alpha$. 21) $aeAB\alpha$. 22) $abdef$. 23) $abdeA$. 24) $adeAB$. 25) $ace\alpha\beta$. 26) $aef\alpha\beta$. 27) $ade\alpha\beta$.

Ferner aus: 28) $ace\alpha\gamma$. 29) $cef\alpha\beta$.

Ferner aus: 30) $abc\alpha$, $B+C=2R$. 31) abd, $A-B$, $C+D$. 32) a, b, c, A, $B+C$. 33) $B+C$, αfce. 34) acd, $B+C$, A.

Ferner aus: 35) $cdfA$, $a+b$. 36) $cdfA$, $a-b$. 37) $cdeA$, $a+b$. 38) $cdeA$, $a-b$. 39) $a+b$, $eBfc$. 40) $a+b$, B, $\sphericalangle ACB$, A, C. 41) $a-b$, e, $\sphericalangle ACB$, d, c. 42) $a+b+e$, B, β, c, A.

IV. Capitel.

Von den Linien und Winkeln bei dem Kreise.

§ 21. Grundeigenschaften des Kreises.

Vergleiche Einleitung § 5 und § 7.

Lehrsatz 60. Jeder Kreis hat nur einen Mittelpunkt.

Zum Beweis ziehe man durch einen beliebigen Punkt einen Durchmesser.

Lehrsatz 61. Jeder Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkt eines Kreises gleich einem Radius ist, liegt auf der Peripherie desselben, jeder Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkt kleiner als ein Radius ist, liegt innerhalb und jeder Punkt, für welchen dieser Abstand größer als ein Radius ist, liegt außerhalb des Kreises.

Beweis: Man verbinde den Punkt mit dem Mittelpunkt.

Zusatz: Umkehrung von Lehrs. 61.

Lehrsatz 62. Kreise mit gleichen Radien oder gleichen Durchmessern sind congruent.

Beweis durch Deckung. L. 61.

Lehrsatz 63. Jeder Durchmesser eines Kreises theilt die Peripherie und die Fläche des Kreises in zwei congruente Theile.

Beweis durch Deckung. L. 61.

Erklärung: Ein Winkel, dessen Schenkel Radien eines Kreises sind, heißt ein Centriwinkel. — Zu jedem Centriwinkel gehört ein bestimmter (zwischen seinen Schenkeln liegender) Bogen, eine bestimmte Sehne, ein bestimmter Sector und ein bestimmtes Segment. Wie groß ist der Bogen eines Centriwinkels, wenn letzterer ein gestreckter, ein hohler, ein überstumpfer ist? Gehört auch zu jedem Bogen ein bestimmter Centriwinkel u. s. w.? Wieviel Centriwinkel und wieviel Bogen gehören zu einer Sehne? Wieviel beträgt jedesmal ihre Summe?

Lehrsatz 64. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Centriwinkeln auch gleiche Bogen, Sehnen, Sectoren und Segmente.

Beweis durch Deckung. L. 61.

Zusatz 1. (Umgekehrt.) Zu gleichen Bogen gehören gleiche Centriwinkel, Sehnen, Sectoren und Segmente.

Zusatz 2. Gleiche Sehnen haben gleiche hohle und gleiche überstumpfe Centriwinkel u. s. w.]

§ 22. Ein Kreis und eine Gerade. Sehnen, Tangenten.

Lehrsatz 65. Eine gerade Linie kann mit einer Kreislinie nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben.

Beweis: L. 35.

Zusatz: Ist der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt eines Kreises kleiner als ein Radius, so schneidet die Gerade den Kreis in zwei Punkten, oder ist eine Sehne.

Lehrsatz 66. Steht eine Gerade auf einem Radius in seinem (auf der Peripherie liegenden) Endpunkte senkrecht, so hat sie mit der Peripherie nur diesen Punkt gemeinsam und liegt sonst ganz außerhalb derselben.

Beweis: Man verbinde den Mittelpunkt des Kreises mit einem beliebigen Punkte der Geraden. L. 25, Zus. 2. L. 61.

Erklärung: Eine Gerade, welche mit der Peripherie eines Kreises einen Punkt gemeinsam hat, und deren übrige Punkte sämmtlich außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie oder eine Tangente des Kreises. Der beiden gemeinschaftliche Punkt heißt der Berührungspunkt.

Zusatz 1. (Umkehrung.) Berührt eine Gerade einen Kreis, so steht sie auf dem durch den Berührungspunkt gehenden Radius senkrecht.

Beweis indirect. L. 35.

Zusatz 2. Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises eine Senkrechte auf eine Tangente, so geht dieselbe durch den Berührungspunkt.

Beweis indirect.

Zusatz 3. Errichtet man auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkt eine Senkrechte, so geht diese durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis indirect. Zus. 1.

Zusatz 4. Eine Gerade hat mit einem Kreise keinen Punkt gemeinsam, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkt größer als ein Radius ist.

Aufgabe 21. An einen gegebenen Kreis in einem Punkte seiner Peripherie eine Tangente zu construiren.

Lehrsatz 67. Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises eine Senkrechte auf eine Sehne, so halbirt dieselbe die Sehne sowie den zugehörigen Bogen und den zugehörigen Centriwinkel.

Beweis: Man ziehe die Radien nach den Endpunkten der Sehne. L. 34, Zus. 2.

Zusatz 1. Die Halbirungslinie eines Centriwinkels halbirt die zugehörige Sehne und den zugehörigen Bogen.

Zusatz 2. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Halbirungspunkt einer Sehne steht senkrecht zur Sehne.

Welche andere Eigenschaften hat dieselbe?

Zusatz 3. Jede auf einer Sehne in ihrer Mitte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Welche andere Eigenschaften hat dieselbe?

Aufgabe: Den Mittelpunkt eines Kreises (oder Kreisbogens) zu finden.

Construction mittelst zweier nicht paralleler Sehnen. Zus. 3.

Zusatz 4. Ist ein Punkt von drei Punkten der Peripherie eines Kreises gleichweit entfernt, so ist er der Mittelpunkt.

Zusatz 5. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine gemeinschaftliche Sehne haben, ist die auf dieser Sehne in ihrer Mitte errichtete Senkrechte.

Zusatz 6. Durch jede drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, läßt sich ein Kreis beschreiben.

Lehrsatz 68. Gleiche Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) stehen gleich weit vom Mittelpunkt ab.

Beweis: L. 67. L. 32.

Lehrsatz 69. (Umkehrung.) Sehnen, welche gleich weit vom Mittelpunkt des Kreises abstehen, sind gleich.

Beweis: L. 32. L. 67.

Lehrsatz 70. Die größere von zwei Sehnen eines Kreises hat einen kleineren Abstand vom Mittelpunkt.

Beweis: L. 67. L. 39, Zus.

Lehrsatz 71. (Umkehrung.) Je kleiner der Abstand einer Sehne vom Mittelpunkt ist, desto größer ist die Sehne.

Beweis: L. 39, Zus. L. 67.

Zusatz: Jeder Durchmesser eines Kreises ist größer als jede andere Sehne.

Beweis: L. 71. Anderer Beweis durch L. 26.

Sätze zu § 22.

1) Zwischen parallelen Sehnen eines Kreises liegen gleiche Bogen. L. 67.

2) Stehen zwei Sehnen in einem Kreise senkrecht zu einander, so ist die Summe je zweier nicht aneinander liegender Bogen gleich einem Halbkreise. Bew. durch Satz 1.

3) Errichtet man auf einer Sehne in ihren Endpunkten Perpendikel, so schneiden dieselben auf jedem beliebigen Durchmesser von dessen Endpunkten aus zwei einander gleiche Stücke ab. L. 43, Zus. 1. L. 67 oder L. 43, Zus. 1. L. 67. L. 58, Z. 1.

4) Verbindet man die Endpunkte der einen von zwei parallelen Sehnen mit dem Mittelpunkte, so schneiden die Verbindungslinien auf der anderen von ihren Endpunkten aus gleiche Stücke ab. L. 11. 67. 30, 67.

5) Von allen Senkrechten, die man von Punkten der Peripherie eines Kreises auf eine außerhalb des letzteren gegebene Gerade fällen kann, ist diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, die größte, und diejenige, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht, die kleinste. Die auf der Geraden senkrechte Tangente ist das arithmetische Mittel zwischen je zwei in eine Gerade zusammenfallenden Senkrechten.

Beweis durch einen der Geraden parallelen Durchmesser. L. 43, Zus. 1. L. 67. 71.

6) Unter allen Sehnen, die durch einen Punkt innerhalb eines Kreises gezogen werden können, ist diejenige die kleinste, welche in diesem Punkte halbirt wird. L. 71.

7) Die Berührungspunkte paralleler Tangenten liegen mit dem Mittelpunkt in gerader Linie.

8) Die Halbirungspunkte aller einer Tangente parallelen Sehnen liegen auf dem durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser und jeder Bogen, der zwischen einer dieser Sehnen und der Tangente liegt, wird durch den Berührungspunkt halbirt.

Aufgaben zu § 22.

Den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises zu bestimmen,

1) welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Radius hat; 2) welcher durch zwei gegebene Punkte geht. L. 67, Zus. 5; 3) welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berührt. L. 66, Zus. 3; 4) welcher einen gegebenen Radius hat und eine gegebene Gerade berührt. L. 66, Zus. 3. L. 43, Zus. 2 (zwei Linien); 5) welcher zwei gegebene convergente Linien berührt. L. 66. 36 (zwei Linien); 6) welcher zwei gegebene parallele Linien berührt. L. 43, Zus. 1.

Einen Kreis mit gegebenem Radius zu construiren, welcher

7) durch zwei gegebene Punkte geht (2 Auflösungen. In welchem Fall nur eine? In welchem wird die Auflösung unmöglich?); 8) eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berührt (zwei Aufl.); 9) zwei gegebene

Gerade berührt (vier Aufl. bei convergenten Linien, keine oder unzählig viele bei parallelen); 10) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt. (Man erhält, je nachdem der Abstand des Punktes von der Geraden größer, eben so groß oder kleiner als der Durchmesser des Kreises ist, keine, eine oder zwei Auflösungen.)

Einen Kreis zu construiren, welcher

11) durch drei gegebene Punkte geht (welche Lage dürfen die Punkte nicht haben?); 12) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berührt (wo darf der erstere Punkt nicht liegen?); 13) zwei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt (2 oder 1 Aufl., je nachdem die Geraden convergiren oder parallel sind. Welche Lage des Berührungspunktes ist ausgeschlossen?); 14) zwei gegebene parallele Linien berührt und durch einen zwischen denselben gegebenen Punkt geht (2 Aufl.); 15) drei gegebene gerade Linien berührt (4, 2 oder 0 Aufl.).

16) Den geometrischen Ort der Halbirungspunkte aller Sehnen eines Kreises zu finden, welche eine gegebene Länge haben. L. 67. 68.

17) Den geometrischen Ort aller Punkte zu bestimmen, von denen aus man Tangenten von gegebener Länge an einen gegebenen Kreis ziehen kann. L. 66 Z. 1. L. 31.

18) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehen. L. 71.

19) In einem gegebenen Kreis eine Sehne parallel einer gegebenen Geraden zu legen, so daß sie a) eine gegebene Länge habe, oder b) von einer anderen, gegebenen Sehne, oder c) von einer anderen, gegebenen Kreislinie halbirt wird. L. 67. L. 43, Zus. 1. L. 11, Zus.

20) Den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises zu bestimmen, welcher eine gegebene Gerade unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet und einen gegebenen Radius hat. L. 68. L. 43, Zus. 2. L. 67.

21) Einen Kreis mit gegebenem Radius zu construiren, welcher jede von zwei gegebenen Geraden unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

§ 23. Peripheriewinkel.

Erklärung: Ein Peripheriewinkel ist ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel entweder durch zwei Sehnen, oder durch eine Sehne und eine Tangente gebildet werden. Zu jedem Peripheriewinkel gehört ein Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt. Man sagt, „der Peripheriewinkel stehe auf diesem Bogen.“ Wieviel Peripheriewinkel gehören zu einem Bogen?

Lehrsatz 72. Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß, als der Centriwinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht.

Beweis: a) Der Mittelpunkt liege auf einem Schenkel des Peripheriewinkels. L. 19. L. 22.

b) Der Mittelpunkt liege innerhalb des Peripheriewinkels. Man ziehe durch ihn und den Scheitel des Peripheriewinkels eine Gerade, so wird jeder der beiden Winkel in zwei Theile getheilt. Durch zweimalige An-

wendung des Beweises des vorigen Falles und Addition der zusammengehörigen Theile ergiebt sich die Behauptung;

c) der Mittelpunkt liege außerhalb des Peripheriewinkels. Man verfahre wie bei b), nur daß die einzelnen Winkel, statt addirt, subtrahirt werden müssen;

d) der Peripheriewinkel werde durch eine Sehne und eine Tangente gebildet. Man halbire den Centriwinkel. L. 67, Zus. 1. L. 20. L. 66, Zus. 1.

Zusatz 1. Alle Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen stehen, sind gleich.

Beweis: Sie haben einen gemeinschaftlichen Centriwinkel.

Zusatz 2. Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen stehen, sind gleich.

Beweis: L. 64, Zus. 1.

Frage: Gehören auch zu gleichen Sehnen gleiche Peripheriewinkel? Gehören zu gleichen Peripheriewinkeln gleiche Sehnen?

Zusatz 3. Jeder Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreis steht, ist ein rechter.

Beweis: Der zugehörige Centriwinkel ist ein gestreckter.

Zusatz 4. Die Summe zweier Peripheriewinkel, welche auf derselben Sehne, aber auf entgegengesetzten Bogen stehen, ist gleich zwei Rechten.

Beweis: Die Summe der zugehörigen Centriwinkel ist gleich vier Rechten.

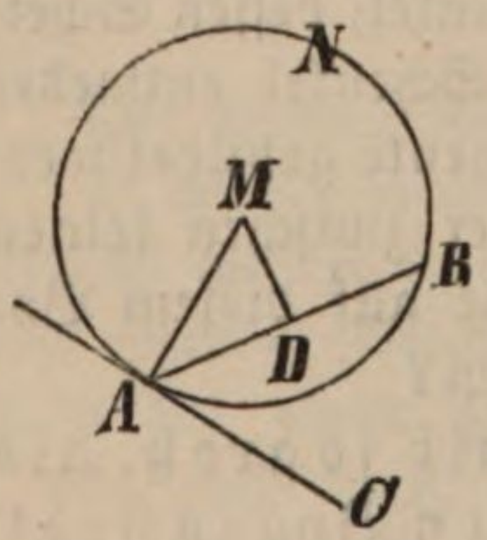
Zusatz 5. Der geometrische Ort der Scheitel aller Winkel von gleicher Größe, deren Schenkel durch zwei gegebene Punkte gehen, ist ein (resp. zwei) Kreisbogen.

Beweis indirect. L. 19, Zus. 2.

Zusatz 6. Der geometrische Ort der Spitzen aller rechtwinkeligen Dreiecke, welche auf einer gemeinschaftlichen Hypotenuse (und auf einerlei Seite derselben) stehen, ist die Peripherie des über der Hypotenuse als Durchmesser beschriebenen Halbkreises.

Aufgabe 22. Ueber einer gegebenen Geraden als Sehne ein Kreissegment zu beschreiben, dessen Peripheriewinkel eine gegebene Größe haben.

Construction: Es sei AB die gegebene Gerade. Man lege an AB in A eine Gerade AC unter dem gegebenen Winkel an, errichte AM senkrecht auf AC, halbire AB in D und errichte DM senkrecht auf AB. Ein um den Durchschnittspunkt M der beiden Senkrechten mit MA als Radius beschriebener Kreisbogen ANB ist der verlangte.



Beweis: L. 67, Zus. 5. L. 72, Zus. 1. (Vgl. L. 72 d.) Noch andere Constructionen sind leicht zu finden.

Aufgabe 23. An einen gegebenen Kreis von einem außerhalb desselben gegebenen Punkte eine Tangente zu construiren.

Construction: Man zeichne über der Verbindunglinie des gegebenen Punktes und des Mittelpunktes mittelst L. 72, Zus. 6 ein rechtwinke-

liges Dreieck, dessen Spitze auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt. Zwei Auflösungen.

Zusatz: Die beiden Tangenten, die man von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkte an diesen ziehen kann, sind gleich lang; der von ihnen gebildete Winkel wird durch die Verbindungslinie jenes Punktes mit dem Mittelpunkt halbirt.

Aufgaben zu § 23.

Ein rechtwinkeliges Dreieck über einer gegebenen Hypotenuse zu construiren, wenn gegeben ist: 1) eine Linie, auf welcher der Scheitel des rechten Winkels liegen soll; 2) die auf der Hypotenuse senkrechte Höhe, 3) der Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse, 4) der Abstand des Scheitels des rechten Winkels von einer gegebenen Geraden. L. 72, Zus. 6.

Ueber einer gegebenen Seite ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel und 5) die zu dieser Seite gehörige Höhe, 6) die Höhe auf einer anderen Seite, 7) die Länge der Verbindungslinie des Halbirungspunktes der gegebenen Seite mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte, 8) die Summe der beiden anderen Seiten. L. 72, Zus. 5. A. 22.

9) Ein Dreieck aus einer Seite und den Höhen auf die beiden anderen zu construiren. L. 72, Zus. 6.

10) In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben (dessen Eckpunkte auf der Peripherie liegen). L. 22, Zus. A. 22.

11) In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das mit einem gegebenen Dreieck gleiche Winkel hat. A. 22.

12) Durch einen gegebenen Punkt eine Sehne von gegebener Länge in einen gegebenen Kreis zu construiren. Aufg. 16 zu § 22. A. 23.

13) An zwei gegebene Kreise von einem zu bestimmenden Punkte aus Tangenten von gleicher Länge zu legen. Aufg. 17 zu § 22.

14) Den geometrischen Ort der Halbirungspunkte aller Sehnen eines Kreises zu bestimmen, die von demselben Punkte der Peripherie auslaufen. L. 67. 72, Zus. 6.

15) Durch einen innerhalb oder außerhalb eines Kreises gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß die auf ihr liegende Sehne a) von einer gegebenen Sehne, b) von einer gegebenen Kreislinie halbirt werde. L. 72, Zus. 6.

16) Zu drei gegebenen Punkten A, B, C einen vierten x zu bestimmen, so daß die Linien Ax, Bx, Cx zwei gegebene Winkel mit einander bilden. (Pothenot'sche Aufgabe.) A. 22.

17) Zu drei gegebenen Punkten einen vierten zu bestimmen, so daß die drei Verbindungslinien des letzteren mit den ersteren mit einander drei gleiche Winkel bilden. A. 22.

18) Auf einer geraden Linie in einem ihrer Endpunkte eine Senkrechte zu errichten, ohne sie über diesen Endpunkt zu verlängern. L. 72, Zus. 6.

Sätze zu § 23.

1) Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Kreises mit den Endpunkten einer Sehne, so ist der von den Verbindungslinien gebildete Winkel größer als der mit ihm in demselben Abschnitt liegende, auf dieser Sehne stehende Peri-

pheriewinkel; liegt aber jener Punkt außerhalb des Kreises, so ist jener Winkel kleiner als dieser Peripheriewinkel. L. 19, Zus. 2.

2) Schneiden sich zwei Sehnen in einem Kreise, so ist der von ihnen gebildete Winkel gleich der Summe der Peripheriewinkel, welche mit ihm und seinem Scheitelwinkel auf demselben Bogen stehen. L. 19. L. 72, Zus. 1.

3) Der Winkel, welchen zwei von einem Punkte außerhalb eines Kreises auslaufende Secanten mit einander bilden, ist gleich dem Unterschied der Peripheriewinkel, welche auf den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen stehen. L. 19.

4) Zwei parallele Sehnen, die von den Endpunkten eines Durchmessers auslaufen, sind gleich und ihre Endpunkte liegen mit dem Mittelpunkt in gerader Linie. L. 72, Zus. 3. L. 30, Zus. — L. 46.

5) Fällt man auf eine Sehne von zwei Punkten der Peripherie, die auf derselben Seite der Sehne liegen und von den Endpunkten derselben gleichweit abstehen, Perpendikel, so sind dieselben gleich. L. 64, Zus. 2. L. 72, Zus. 2. L. 30, Zus.

§ 24. Ein- und umbeschriebene Figuren.

Erklärung: Eine Figur heißt einem Kreise einbeschrieben, wenn ihre Eckpunkte auf der Peripherie des Kreises liegen, ihre Seiten also Sehnen sind. Eine Figur heißt einem Kreise umbeschrieben, wenn ihre Seiten Tangenten des Kreises sind.

Im ersteren Fall heißt der Kreis der Figur umbeschrieben, im letzteren ihr einbeschrieben.

Anmerkung: Damit sich um eine gegebene Figur ein Kreis beschreiben lasse, muß es einen Punkt geben, der von allen Eckpunkten der Figur gleichweit entfernt ist, und damit sich in eine gegebene Figur ein Kreis beschreiben lasse, muß es einen Punkt geben, dessen Abstände von allen Seiten der Figur einander gleich sind.

Aus früheren Sätzen folgt:

1) Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben. L. 67, Zus. 6. Wo liegt der Mittelpunkt des Kreises, je nachdem das Dreieck rechtwinkelig, spitzwinkelig oder stumpfwinkelig ist? Vgl. L. 72, Zus. 3.
2) In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben. L. 36.
3) In einem Viereck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt (einem „Kreisviereck"), beträgt die Summe je zweier Gegenwinkel zwei Rechte. L. 72, Zus. 4.

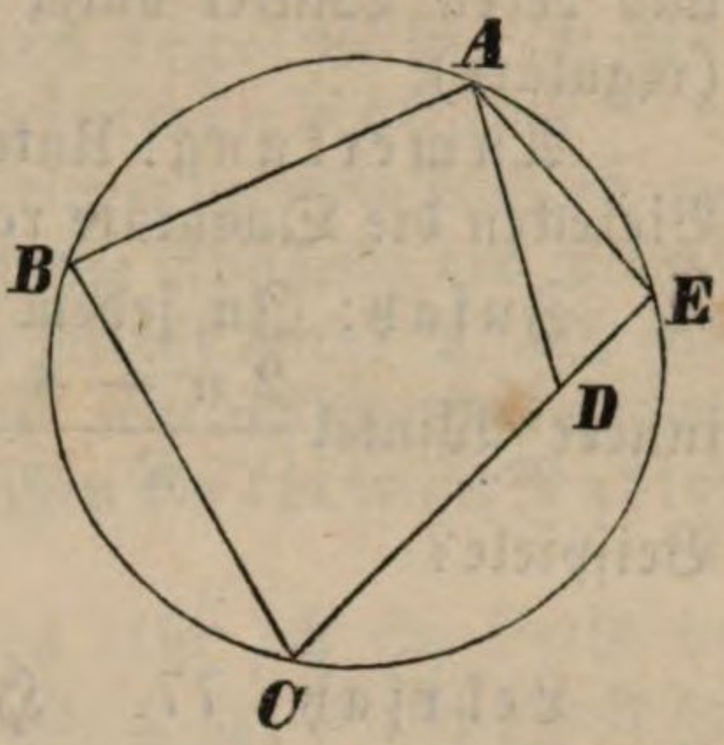
Lehrsatz 73. (Umkehrung v. L. 72, Zus. 4). Beträgt in einem Viereck die Summe zweier Gegenwinkel zwei Rechte, so läßt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

Voraussetzung: $\sphericalangle ABC + ADC = 2R$.

Behauptung: $ABCD$ ist ein Kreisviereck.

Beweis: Man construire einen Kreis, welcher durch die Eckpunkte A, B, C des Vierecks geht (L. 67, Zus. 6), und zeige, daß der vierte Eckpunkt D auf der Peripherie desselben liegen muß. Läge nämlich D innerhalb des Kreises, so könnte man CD bis zum Durchschnitt mit der Peripherie

in E verlängern und AE ziehen. Dann wäre $\sphericalangle ABC + AEC = 2R$ (L. 72, Zus. 4). Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle ABC + ADC = 2R$, daher müßte $\sphericalangle ADC = AEC$ sein, was nach L. 19, Zus. 1 nicht möglich ist. In ähnlicher Weise zeige man, daß D auch nicht außerhalb des Kreises liegen kann.



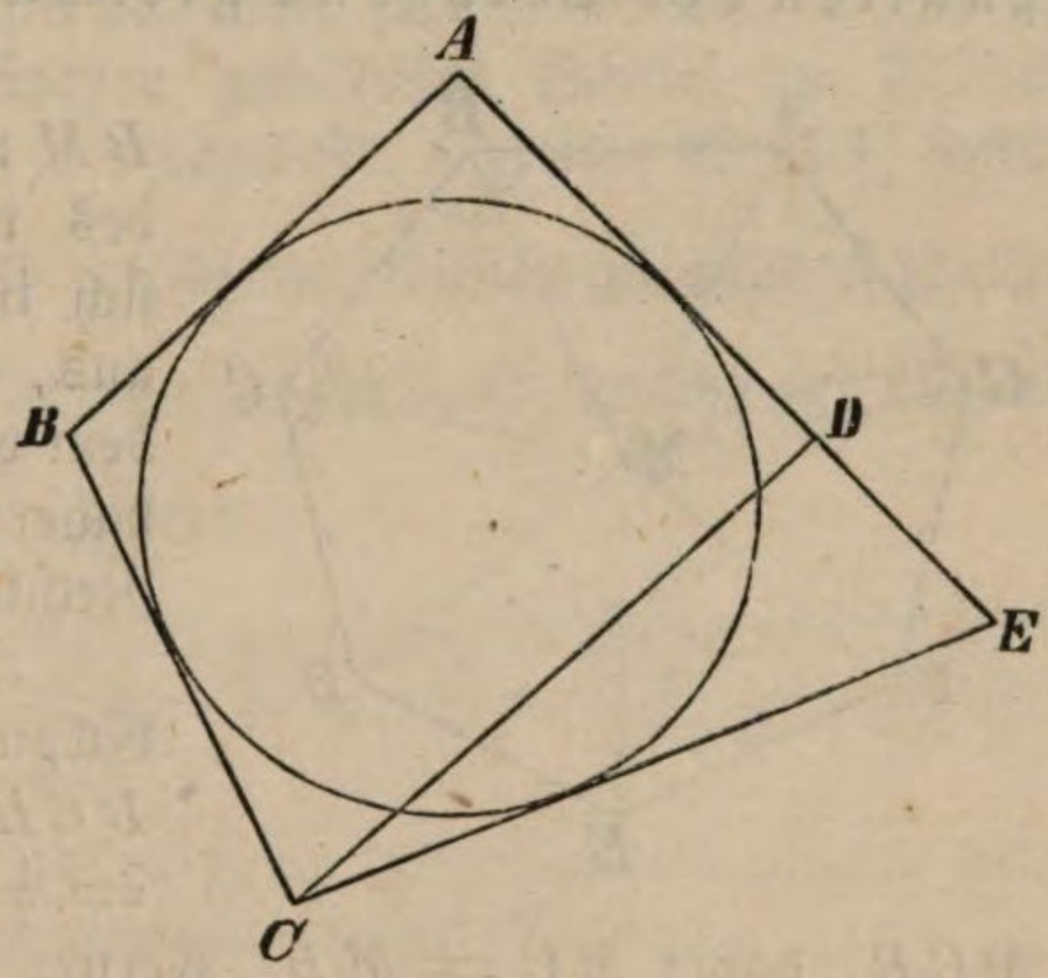
Lehrsatz 74. Ist ein Viereck um einen Kreis beschrieben, so ist die Summe zweier Gegenseiten desselben gleich der Summe der beiden anderen.

Beweis folgt aus § 23, Aufg. 23, Zus.

Lehrsatz 75. (Umkehrung). Ist in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen, so läßt sich in das Viereck ein Kreis beschreiben.

Voraussetzung: $AB + CD = BC + AD$.

Behauptung. In das Viereck $ABCD$ läßt sich ein Kreis beschreiben.



Beweis: Man construire einen Kreis, welcher drei Seiten AB, CB DA des Vierecks berührt. Wenn nun die vierte Seite CD diesen Kreis nicht berührte, so müßte sie ihn entweder schneiden, oder keinen Punkt mit ihm gemeinsam haben. Im ersteren Fall könnte man von C aus eine Tangente an den Kreis ziehen, welche die Verlängerung von AD in E träfe. Dann wäre

nach L. 74: $AB + CE = BC + AD + DE$. Nun ist nach Voraussetzung $AB + CD = BC + AD$, also wäre

$$CE - CD = DE,$$

was nach L. 27 unmöglich ist. In ähnlicher Weise zeige man, daß CD auch nicht ganz außerhalb des Kreises fallen kann.

Zusatz: Um und in jedes Quadrat, um jedes Rechteck und in jeden Rhombus läßt sich ein Kreis beschreiben.

Lehrsatz 76. Zieht man in einem Kreise n Radien, so daß je zwei benachbarte einen Winkel von $\frac{360}{n}$ Graden mit einander bilden (die Peripherie des Kreises also in n gleiche Bogen getheilt wird) und verbindet je zwei benachbarte der auf der Peripherie liegenden Endpunkte der Radien mit einander, so entsteht ein dem Kreise einbeschriebenes Polygon mit n gleichen Seiten und n gleichen Winkeln.

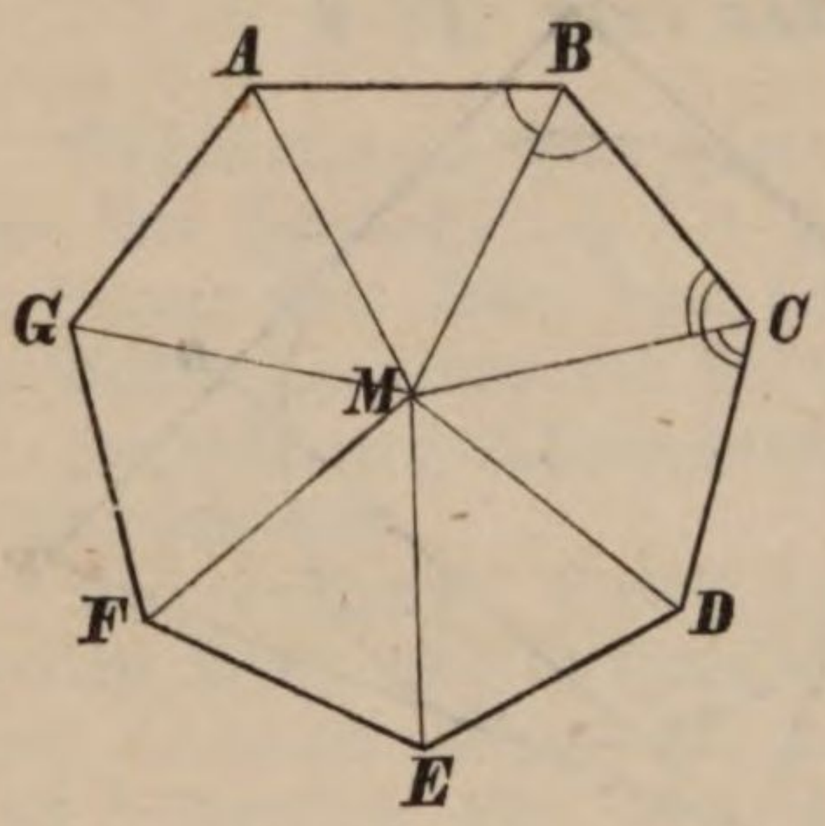
Beweis: L. 64. — L. 72, Zuſ. 2.

Erklärung: Eine geradlinige Figur, deren Seiten unter einander und deren Winkel unter einander gleich ſind, heißt eine regelmäßige (reguläre).

Anmerkung: Unter den Dreiecken ſind die gleichſeitigen, unter den Vierecken die Quadrate regelmäßig.

Zuſatz: In jedem regulären Polygon von n Seiten beträgt jeder innere Winkel $\frac{2n-4}{n}$ Rechte oder 2 Rechte $-\frac{4}{n}$ Rechte (L. 21). — Beiſpiele?

Lehrſatz 77. Halbirt man in einem regelmäßigen Polygon zwei benachbarte Winkel, ſo ſchneiden ſich die Halbirungslinien in einem Punkte, welcher von allen Eckpunkten des Polygons gleichweit abſteht.



Beweis: Daß die Halbirungslinien BM und CM der Winkel ABC und BCD des regelmäßigen Polygons $ABCDE\ldots$ ſich in einem Punkte M treffen, folgt daraus, daß jeder Winkel des Polygons nach dem vorigen Zuſatz kleiner als zwei Rechte, daher MBC und BCM kleiner als ein Rechter ſind. L. 8, Zuſ.

Man verbinde nun M mit ſämmtlichen Eckpunkten des Polygons. Da $\sphericalangle ABC = BCD$ und $\sphericalangle MBC = \frac{1}{2} ABC$, $\sphericalangle MCB = \frac{1}{2} BCD$ iſt, ſo iſt auch $\sphericalangle MBC = MCB$, daher $MC = MB$. Ferner iſt $\triangle MBC \cong MCD$ (L. 31), alſo $MD = MB$, alſo auch $MD = MC$. Daher iſt ferner $\sphericalangle MDC = MCD$ (L. 22), alſo auch $\sphericalangle MDC = \frac{1}{2} CDE = MDE$. Hieraus folgt wieder, daß $\triangle MDE \cong MDC$ (L. 31), alſo $ME = MC = MD$ iſt, und in dieſer Weiſe kann man fortfahren, bis die Gleichheit ſämmtlicher Verbindungslinien von M mit den Eckpunkten bewieſen iſt.

Erklärung: Der von allen Eckpunkten eines regelmäßigen Polygons gleichweit entfernte Punkt heißt der Mittelpunkt und die Verbindungslinien deſſelben mit den Eckpunkten heißen die großen Radien deſſelben.

Zuſatz 1. Um jedes regelmäßige Polygon läßt ſich ein Kreis beſchreiben.

Zuſatz 2. Die großen Radien theilen das regelmäßige Polygon von n Seiten in n congruente und gleichſchenkelige Dreiecke, ſie halbiren ferner die Winkel des Polygons und bilden am Mittelpunkt mit einander n gleiche Winkel, deren jeder $\frac{360^0}{n}$ beträgt.

Zuſatz 3. Die Halbirungslinien ſämmtlicher Winkel eines regelmäßigen Polygons ſchneiden ſich in einem einzigen Punkte, nämlich dem Mittelpunkt.

Zusatz 4. Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem großen Radius desselben. L. 24, Zus.

Lehrsatz 78. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Polygons hat von allen Seiten desselben gleichen Abstand.

Man beweise die Congruenz je zweier einem großen Radius anliegender Dreiecke, in welche das Polygon durch die Abstände des Mittelpunkts von den Seiten und die großen Radien zerlegt wird. L. 30, Zus.

Erklärung: Die vom Mittelpunkt eines regelmäßigen Polygons auf die Seiten desselben gefällten Perpendikel heißen die kleinen Radien des Polygons.

Zusatz 1. In jedes regelmäßige Polygon läßt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist zugleich der Mittelpunkt des dem Polygon umbeschriebenen Kreises.

Zusatz 2. Die kleinen Radien theilen das regelmäßige Polygon von n Seiten in n congruente Vierecke, sie halbiren ferner die Seiten und die von je zwei benachbarten großen Radien gebildeten Winkel am Mittelpunkt; und sie bilden unter sich am Mittelpunkt n gleiche Winkel, deren jeder $\frac{360^0}{n}$ beträgt. Die großen und die kleinen Radien zusammen theilen das Polygon in $2n$ congruente rechtwinkelige Dreiecke, welche am Mittelpunkt $2n$ gleiche Winkel von je $\frac{180^0}{n}$ haben.

Zusatz 3. Die auf den Seiten eines regelmäßigen Polygons in ihren Mitten errichteten Senkrechten schneiden sich in einem einzigen Punkte, nämlich dem Mittelpunkt des Polygons.

Bemerkung: Die Construction regelmäßiger Polygone in oder um einen gegebenen Kreis wird in § 39 zusammenhängend gezeigt werden.

Sätze zu § 24.

1) In jedem einem Kreise einbeschriebenen Polygon von gerader Seitenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften Winkels u. s. w. gleich der Summe des zweiten, vierten u. s. w. Beweis: Man ziehe die Radien nach den Eckpunkten. L. 72.

2) In jedem einem Kreise umbeschriebenen Polygon von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften Seite u. s. w. gleich der Summe der zweiten, vierten u. s. w. Bew. A. 23, Zus.

---

3) Jeder spitze Winkel eines Dreiecks beträgt mit dem Winkel, welcher von der gegenüberliegenden Seite und dem durch einen Endpunkt der letzteren gehenden Durchmesser des umbeschriebenen Kreises gebildet wird, einen Rechten; ein stumpfer Dreieckswinkel ist um den letzteren Winkel größer als ein rechter. L. 72, Zus. 1 und 3.

4) In jedem Dreieck schneidet die Mittelsenkrechte einer jeden Seite die Halbirungslinie des inneren und die des Außenwinkels an dem dieser Seite

gegenüberliegenden Eckpunkt auf der Peripherie des umbeschriebenen Kreises. L. 67. 72, Zus. 2 u. Zus. 3.

---

5) Sind in einem Kreisviereck zwei aneinander liegende Seiten gleich, so sind die von den Diagonalen gebildeten Winkel gleich je einem der beiden Viereckswinkel, welche an den nicht gemeinschaftlichen Endpunkten der gleichen Seiten liegen. L. 72, Zus. 1. 2.

6) Legt man durch die Eckpunkte eines in einen Kreis beschriebenen Rechtecks Tangenten an denselben, so entsteht ein umbeschriebener Rhombus. L. 9. L. 72, Zus. 1. L. 30. A. 23, Zus.

Aufgaben zu § 24.

Ein Dreieck zu construiren aus dem Radius r des umbeschriebenen Kreises (oder in einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben), wenn außerdem gegeben sind:

1) zwei Seiten a, b; 2) eine Seite a und ein ihr anliegender Winkel β; 3) a und die zu a senkrechte Höhe h_a; 4) ein Winkel α und die zu einer ihr anliegenden Seite senkrechte Höhe h_b; 5) α und β. Vergl. Aufg. 11 zu § 23. 6) h_a und die zu a gehörige seitenhalbirende Transversale m_a; 7) h_a und α. 8) m_a und α. 9) b und die Differenz $\beta - \gamma$ des der Seite b gegenüberliegenden und eines ihr anliegenden Winkels. 10) Die Seite c und $\beta - \gamma$. 11) a und $\beta - \gamma$. 12) $b + c$ und β. 13) $b - c$ und β. 14) $b - c$ und γ.

Zur Analyse beachte man, daß durch eine Sehne im Kreise der zugehörige Peripheriewinkel gegeben ist, und umgekehrt.

Ferner ein Dreieck zu construiren aus dem Radius r und 15) a, $b + c$. 16) a, $b - c$. 17) α, $b + c$. 18) α, $b - c$. 19) α, $a + b + c$.

Ferner aus r und 20) a, m_b, 21) α, m_b, 22) a und dem Fußpunkt der den a gegenüberliegenden Winkel α halbirenden Transversale t_a.

Ein Dreieck zu construiren aus dem Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises (oder um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben), wenn außerdem gegeben sind:

23) zwei Winkel α, β; 24) ein Winkel α und die denselben halbirende Transversale t_α; 25) α und eine anliegende Seite b.

Ferner aus ϱ und 26) einer Seite a und der Höhe h_b auf einer anderen Seite; 27) einem Winkel α und der Höhe h_b auf eine ihm anliegende Seite; 28) der Höhe h_a und der von demselben Eckpunkt ausgehenden winkelhalbirenden Transversale t_a. Anal.: Durch die gegebenen Stücke ist ein rechtwinkeliges Dreieck bestimmt. Der Mittelpunkt des Kreises ist dann durch zwei Oerter gegeben.

In einem Kreisviereck $ABCD$ seien die Winkel an A, B, C, D bezüglich durch α, β, γ, δ, die Seiten AB, BC, CD, DA bezüglich durch a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD durch e und f, der Radius des umbeschriebenen Kreises durch r und der Winkel der Diagonalen durch ε bezeichnet. Man construire das Viereck aus: 29) r, a, b, c. 30) r, a, b, α. 31) r, a, c, α. 32) r, a, α, β. 33) r, a, α, δ. 34) r, a, γ, δ. 35) r, b, d, $\sphericalangle DAC$. 36) r, a, c, e.

37) r, a, b, f. 38) r, a, e, f. 39) r, a, e, α. 40) r, a, b, ε. 41) r, a, e, ε. 42) $r, a, \alpha, \varepsilon$.

Ferner aus: 43) r, e, f, ε. Vergl. Aufg. 19a zu § 22. 44) $r, a, c, \beta + \gamma$. Anal.: Durch r, a und c sind zwei Peripheriewinkel bestimmt, welche mit den zu d gehörigen zusammen gleich $\beta + \gamma$ sind. 45) $r, e, \alpha, \varepsilon$. Anal.: Durch α ist f bestimmt. Vergl. 43.

Ferner aus: 46) b, c, e, α. Anal.: Durch α ist γ, durch b, c und γ der Kreis bestimmt. 47) a, b, e, f. 48) a, b, e, α. 49) a, b, f, α. 50) a, b, β, ε. 51) a, c, e, β. Anal.: durch e und β ist der Kreis bestimmt. 52) $e, \alpha, \beta, \varepsilon$. 53) $a, b, c, \sphericalangle CAB$. 54) $a, b, f, \sphericalangle CAB$. 55) a, b, e, ε. 56) $a, b, \varepsilon, \sphericalangle ACB$. 57) $a, e, f, \sphericalangle ACB$. 58) $a, c, \sphericalangle BAC, \sphericalangle ACD$. 59) $e, f, \sphericalangle BAC, \sphericalangle ACB$. 60) $e, f, \alpha, \varepsilon$. Vgl. 43. 61) $e, f, \varepsilon, \sphericalangle ACB$.

Ein Viereck, in welches ein Kreis beschrieben werden kann, zu construiren (wenn ϱ den Radius dieses Kreises bedeutet und im Uebrigen die bisherigen Bezeichnungen beibehalten werden) aus:

62) $\varrho a e \alpha$. 63) $\varrho a b \beta$. 64) $\varrho a \alpha \gamma$. 65) $\varrho e \alpha \beta$. 66) $\varrho a \beta \gamma$. 67) $\varrho e \alpha \gamma$. 68) $\varrho a b \alpha$ 69) $abce$. 70) $abc\beta$. 71) $abc\alpha$. 72) $abe\alpha$. 73) $ab\beta\gamma$. 74) $a\alpha\beta\gamma$.

Ebenso, wenn das Viereck ein Trapez sein soll und a die größere, c die kleinere der parallelen Seiten ist, aus

75) $\varrho b d$. 76) $\varrho, a + c, b$. 77) ϱ, b, c.

Ebenso ein gleichschenkeliges Trapez (bei denselben Bezeichnungen, wenn außerdem h die Höhe ist):

78) ac. 79) bc. 80) ch. 81) bh. 82) $b\alpha$. 83) $c\gamma$.

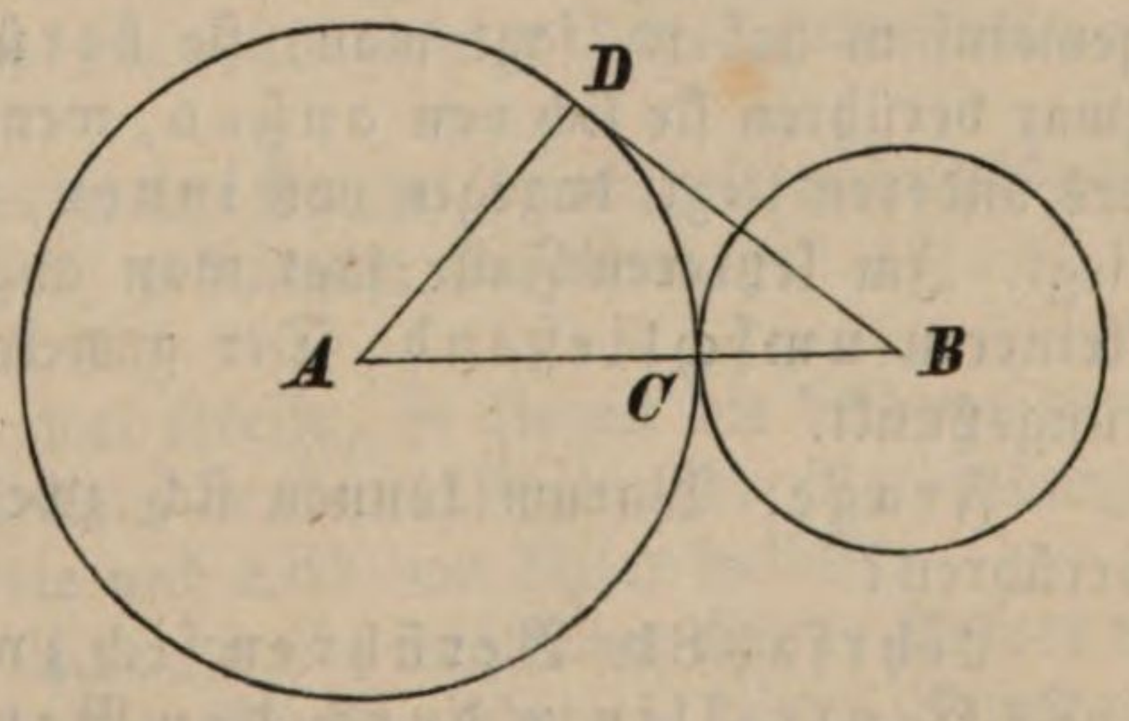
Ein Viereck, in und um welches sich ein Kreis construiren läßt, zu zeichnen aus

84) $a\alpha\beta$. 85) $\varrho a \alpha$. 86) $\varrho a \gamma$. 87) $\varrho \alpha \beta$.

§ 25. Zwei Kreise.

Erklärung: Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise heißt die Centrallinie der Kreise.

Lehrsatz 79. Ist die Centrallinie zweier Kreise gleich der Summe ihrer Radien, so haben ihre Peripherien einen Punkt gemeinsam und jeder andere Punkt des einen Kreises liegt immer außerhalb des anderen.

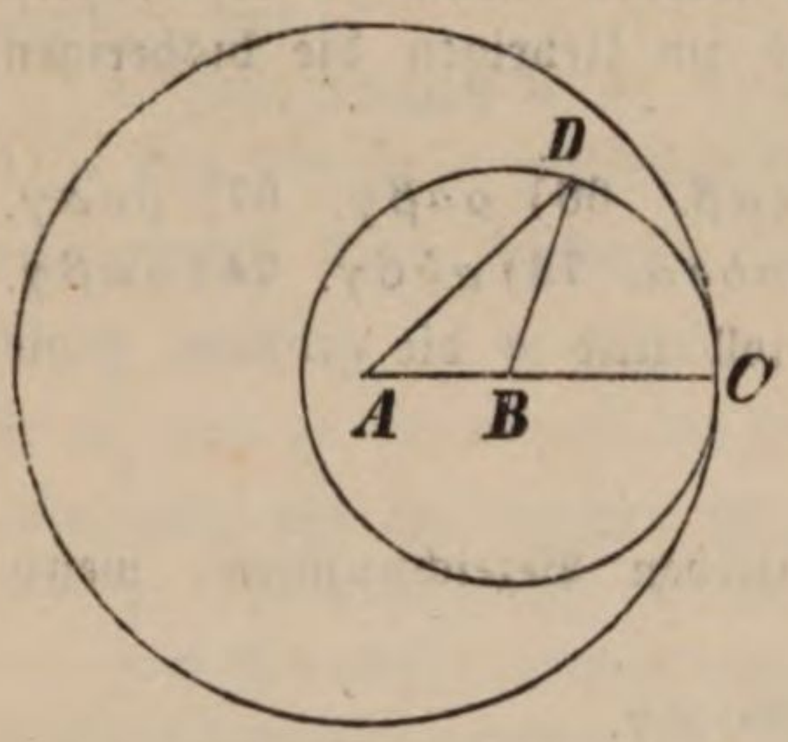


Beweis: Es seien A und B die Mittelpunkte zweier Kreise, R die Länge des Radius des Kreises A, r die Länge des Radius des Kreises B und $AB = R + r$. Der Kreis A schneidet die Centrallinie in einem Punkte C und es ist also $AC = R$; daher muß $BC = R + r - R$ oder $= r$ sein, mithin liegt C auch auf der Peripherie des Kreises B, ist also beiden Kreisen gemeinschaftlich. Es

sei D irgend ein anderer Punkt der Peripherie des Kreises A, so ziehe man AD und BD. Nun ist $AD + BD > AC + BC$ (L. 26) und $AD = AC = R$, also ist $BD > BC$ oder größer als r. Mithin liegt D außerhalb des Kreises B. Ebenso kann man von jedem beliebigen Punkt der Peripherie des Kreises B beweisen, daß er außerhalb des Kreises A liegt.

Anmerkung: Jeder der Kreise A und B hat außer C noch einen Punkt, für welchen dieser Beweis nicht gilt. Welche Punkte sind dies? Wie ergiebt sich für sie die Richtigkeit der Behauptung?

Lehrsatz 80. Ist die Centrallinie zweier ungleicher Kreise gleich der Differenz der Radien, so haben die Peripherien beider Kreise einen Punkt gemeinsam und alle anderen Punkte der Peripherie des kleineren Kreises liegen innerhalb des größeren.



Beweis: Es seien A, B die Mittelpunkte, R und r beziehungsweise die Radien der beiden Kreise und $AB = R - r$. Man verlängere AB über den Mittelpunkt des kleineren Kreises, bis die Verlängerung die Peripherie des kleineren Kreises in C trifft; dann ist $BC = r$, also $AB + BC = R - r + r$, oder $AC = R$, mithin liegt C auch auf der Peripherie des Kreises A.

Man nehme auf der Peripherie des Kreises B irgend einen anderen Punkt D an und ziehe AD und BD. Dann ist $AB + BD > AD$, oder, da $BD = BC$ ist, $AB + BC > AD$, oder $AD < AC$. Daher liegt D innerhalb des Kreises A.

Anmerkung: Für einen Punkt des Kreises B bedarf der Beweis einer Abänderung. Für welchen?

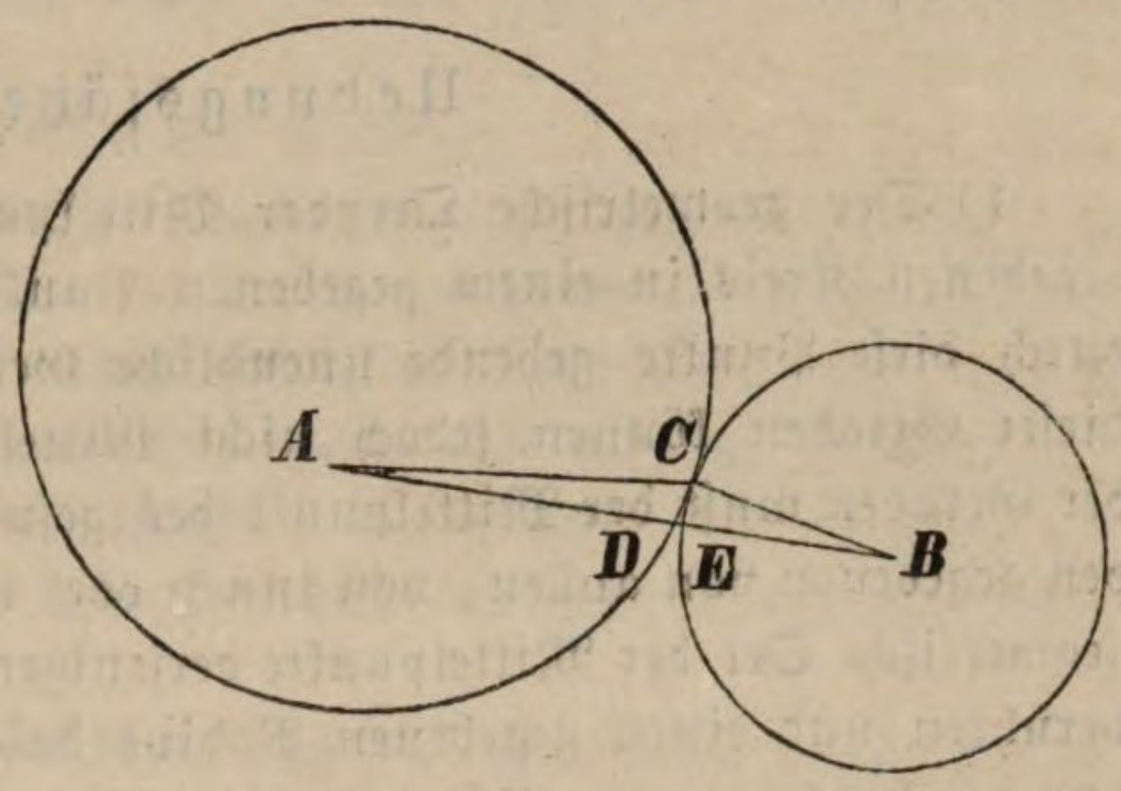
In ähnlicher Art kann man beweisen, daß jeder Punkt der Peripherie des Kreises A außerhalb des Kreises B liegt.

Erklärung: Von zwei Kreisen, deren Peripherien nur einen Punkt gemeinsam haben, sagt man, sie berühren sich in diesem Punkte; und zwar berühren sie sich von außen, wenn jeder der beiden Kreise außerhalb des anderen liegt, dagegen von innen, wenn der kleinere ganz im größeren liegt. Im letzteren Falle sagt man auch, der größere Kreis berühre den kleineren umschließend. Der gemeinschaftliche Punkt heißt der Berührungspunkt.

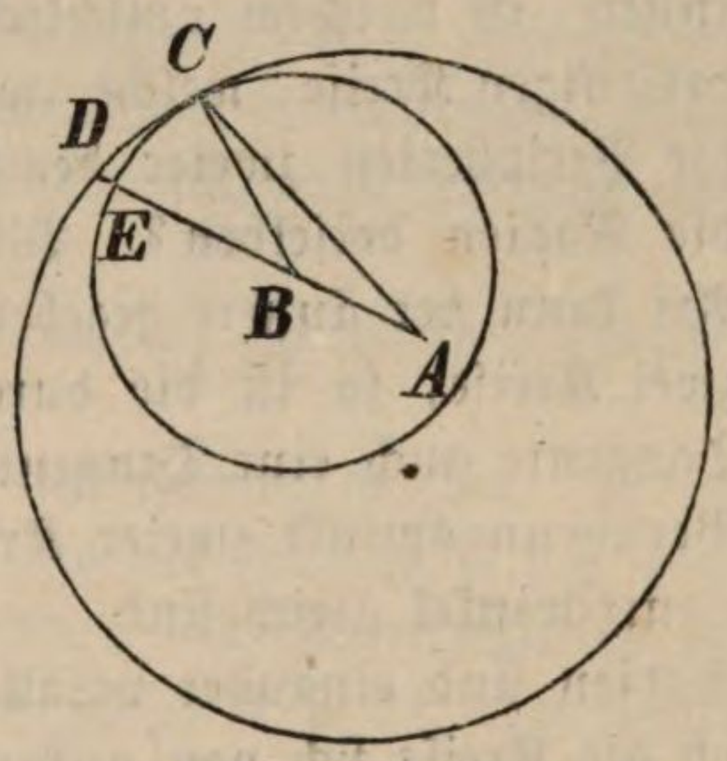
Frage: Warum können sich zwei gleiche Kreise nicht von innen berühren?

Lehrsatz 81. Berühren sich zwei Kreise von außen, so geht ihre Centrallinie durch den Berührungspunkt und ist gleich der Summe der beiden Radien, berühren sich zwei Kreise von innen, so geht die Verlängerung der Centrallinie über den Mittelpunkt des kleineren Kreises durch den Berührungspunkt und die Centrallinie ist gleich der Differenz der beiden Radien.

Beweis: a) Ginge die Centrallinie AB nicht durch den Berührungspunkt C, so müßte sie die Peripherie des Kreises A in einem Punkte D und die Peripherie des Kreises B in einem anderen Punkte E schneiden. Zöge man nun AC und BC, so wäre $AC = AD$, $BC = BE$, also $AC + BC < AB$, was unmöglich ist. Also muß AB durch C gehen, worauf sich weiter von selbst ergiebt, daß $AB = AC + BC = R + r$ ist.



b) Gesetzt, die Verlängerung der Centrallinie AB ginge nicht durch den Berührungspunkt C, so müßte sie die Peripherie des Kreises B in einem innerhalb des Kreises A liegenden Punkte E und die Peripherie von A in einem außerhalb des Kreises B liegenden Punkte D treffen. Zieht man nun AC und BC, so wäre $AC = AD = R$, $BC = BE = r$, also $AC - BC = AD - BE = AB + ED$, oder $AC - BC > AB$. Da dies nicht möglich ist, so müssen A, B und C in gerader Linie liegen, und es ist $AB = AC - BC = R - r$.



*Zusatz 1. Ist die Centrallinie zweier Kreise größer als die Summe ihrer Radien, so liegt jeder der beiden Kreise ganz außerhalb des anderen und ihre Peripherien haben keinen Punkt gemeinsam.

Beweis: Ist C ein Punkt des Kreises A, so ist $AC = R$, $AC + BC > AB$, also auch $AC + BC > R + r$, daher $BC > r$.

*Zusatz 2. Ist die Centrallinie zweier Kreise kleiner als die Summe und größer als die Differenz ihrer Radien, so schneiden sich ihre Peripherien in zwei Punkten.

Beweis: Man construire über und unter der Centrallinie ein Dreieck aus den Seiten R und r.

Zusatz 3. Die Peripherien zweier Kreise können nie mehr als zwei Punkte gemeinsam haben, ohne ganz zusammen zu fallen.

Beweis mittelst L. 67, Zus. 3.

*Zusatz 4. Schneiden sich zwei Kreise, so liegen die beiden Durchschnittspunkte auf verschiedenen Seiten der Centrallinie; ihre Verbindungslinie steht senkrecht zur Centrallinie und wird von dieser halbirt.

*Zusatz 5. Ist die Centrallinie zweier ungleicher Kreise kleiner als die Differenz ihrer Radien, so haben ihre Peripherien keinen Punkt gemeinsam und der kleinere Kreis liegt ganz innerhalb des größeren.

Beweis: Verbinde einen beliebigen Punkt der Peripherie des kleineren Kreises mit den Mittelpunkten. L. 27.

Zusatz 6. Die Zusätze 1—5 lassen sich umkehren.

Erklärung: Kreise, deren Mittelpunkte zusammenfallen, heißen concentrisch; Kreise, deren Mittelpunkte verschieden sind, heißen excentrisch.

Uebungssätze zu § 25.

1) Der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte seiner Peripherie berühren, ist die durch diese Punkte gehende unendliche Gerade. — L. 81. Welche zwei Punkte dieser Geraden können jedoch nicht Mittelpunkte werden? Auf welchem Theil der Geraden muß der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen, je nachdem dieser den gegebenen von außen, von innen oder umschließend berühren soll? — 2) Der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche einen gegebenen Kreis berühren und einen gegebenen Radius haben, wird von den Peripherien zweier dem gegebenen concentrischen Kreise gebildet. — L. 81. Wie groß sind die Radien dieser Kreise? In welchem Fall fällt der eine von ihnen weg, auf welcher Kreislinie liegen die Mittelpunkte der von außen berührenden Kreise und in welchem Fall berühren die zu der andern Kreislinie gehörigen Kreise den gegebenen von innen, in welchem umschließend? — 3) Der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche zwei gegebene concentrische Kreise berühren, wird durch die Peripherien zweier demselben concentrischer Kreise gebildet. Wie groß sind die Radien derselben? Wie construirt man sie am einfachsten? Auf welche Art kann der äußere gegebene Kreis allein berührt werden? — 4) Berühren sich zwei Kreise, so ist die durch den Berührungspunkt an einen derselben gelegte Tangente auch eine Tangente des anderen. — 5) Jede Gerade, welche durch den Berührungspunkt zweier Kreise geht, schneidet von denselben Bogen ab, deren Centriwinkel gleich sind. — Die nach den Endpunkten dieser Geraden gehenden Radien sind einander parallel. 4. L. 72 d. — Welchen Unterschied macht es dabei, ob die Kreise sich von außen oder von innen berühren? — 6) Umgekehrt liegen je zwei Endpunkte paralleler Durchmesser in zwei sich berührenden Kreisen mit dem Berührungspunkt in gerader Linie. — 7) Zieht man durch den Berührungspunkt zweier Kreise zwei gerade Linien und zieht in jedem der Kreise die Sehne, welche ihre Durchschnittspunkte mit diesem Kreise verbindet, so sind diese Sehnen einander parallel. L. 72 d. — Umkehrung. — 8) Ist der Durchmesser des kleineren zweier sich von innen berührender Kreise gleich dem Radius des größeren, so halbirt die Peripherie des kleineren jede durch den Berührungspunkt gehende Sehne des größeren. — L. 72, Zus. 3. L. 67.

9) Schneiden sich zwei gleiche Kreise, so sind die abgeschnittenen Bogen beider bezüglich gleich und die gemeinschaftliche Sehne halbirt die Centrallinie. L. 33. 64. 34, Zus. 2. — Umkehrung. — 10) Ungleiche Kreise schneiden sich unter ungleichen Bogen; der innerhalb des anderen Kreises liegende Bogen hat in dem kleineren Kreise den größeren Centriwinkel. L. 23. 67. — Umkehrung. — 11) Zwei Kreise können einander nie so schneiden, daß sich ihre Peripherien gegenseitig halbiren. — 12) Jede durch den Durchschnittspunkt der Centrallinie und der gemeinschaftlichen Sehne zweier sich schneidender gleicher Kreise gezogene und entweder durch die beiden inneren oder durch die beiden äußeren Bogen begrenzte Gerade wird in jenem Punkte halbirt. Die nach ihren Endpunkten gezogenen Radien sind parallel. 9. L. 32. — Umkehrungen. — 13) Zieht man

in jedem von zwei sich schneidenden Kreisen von einem Durchschnittspunkt aus einen Durchmesser, so liegen die anderen Endpunkte dieser Durchmesser mit dem anderen Durchschnittspunkt in gerader Linie. L. 72, Zus. 3.

Aufgaben zu § 25.

1) Um einen gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis berührt. — Man unterscheide, ob der gegebene Punkt außerhalb oder innerhalb des gegebenen Kreises oder auf seiner Peripherie liegt. In den beiden ersten Fällen erhält man je zwei, im letzten nur eine Auflösung.

2) Um jeden von zwei gegebenen Punkten einen Kreis zu beschreiben, so daß die beiden Kreise einander und der eine von ihnen eine gegebene Gerade berührt.

Constr. den Kreis, welcher die Gerade berührt und benutze die vorige Aufgabe.

3) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Constr. mittelst geometrischer Oerter. Man unterscheide, ob der gegebene Punkt auf der Peripherie, außerhalb oder innerhalb des gegebenen Kreises liegt, so wie ob der Radius des gesuchten Kreises gleich dem des gegebenen, oder größer, oder kleiner als derselbe ist. Die Anzahl der möglichen Auflösungen hängt außerdem von der Entfernung des Punktes von dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises ab.

4) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt.

Constr. mittelst geometrischer Oerter. Man unterscheide wieder, ob der Radius r des gesuchten Kreises kleiner oder größer als der Radius R des gegebenen, oder gleich demselben ist, und ob der Abstand des Mittelpunktes des gegebenen Kreises von der Geraden größer als $R + 2r$, gleich $R + 2r$, oder kleiner als $R + 2r$ ist, und im letzteren Falle wieder, ob er größer als R, gleich R, oder kleiner als R ist u. s. w.

5) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Kreise berührt.

Constr. mittelst geometrischer Oerter. Unterscheidung der einzelnen Fälle ähnlich wie vorher. (Die Centrallinie der gegebenen Kreise kann sein größer als $R + r + 2\varrho$, gleich $R + r + 2\varrho$, oder kleiner als $R + r + 2\varrho$, im letzteren Fall wieder größer, gleich oder kleiner als $R + r$, u. s. w. R, r sind die Radien der gegebenen Kreise, ϱ ist der Radius des gesuchten.)

6) Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte seiner Peripherie berührt und durch einen anderen gegebenen Punkt geht.

Constr. durch zwei geom. Oerter. Der gegebene Punkt kann liegen a) auf der dem gegebenen Kreise abgewendeten Seite derjenigen Tangente desselben, welche durch den gegebenen Berührungspunkt geht, b) auf dieser Tangente, c) auf derselben Seite der Tangente, auf welcher der Kreis liegt, und zwar 1) außerhalb des Kreises, 2) auf seiner Peripherie, 3) innerhalb des Kreises. In zweien dieser Fälle ist die Construction unmöglich, jeder der übrigen liefert eine der drei Berührungsarten.

7) Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene concentrische Kreise berührt

und durch einen a) auf der Peripherie eines derselben, b) zwischen ihren Peripherien gegebenen Punkt geht.

a) Zwei, b) vier Auflösungen.

8) Einen Kreis zu construiren, der die beiden Radien und den Bogen eines gegebenen Sectors berührt.

Kann auf Aufg. 15 zu § 22 zurückgeführt werden.

9) Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte seiner Peripherie und außerdem eine gegebene Gerade berührt.

§ 22, Aufg. 21. — L. 66, Zus. 3.

10) Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene gleich große Kreise von außen berühre, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte.

§ 17, Aufg. 12. L. 81.

11) Durch einen auf der Peripherie eines Kreises gegebenen Punkt eine Sehne so in denselben zu legen, daß sie durch eine gegebene Sehne halbirt werde.

Uebungssatz 8.

12) Um jeden der drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks einen Kreis zu construiren, so daß jeder dieser Kreise die beiden anderen von außen berührt.

Die Punkte, in welchen der dem Dreieck einbeschriebene Kreis die Seiten desselben berührt, sind auch die Berührungspunkte der drei gesuchten Kreise.

---

13) Den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises zu construiren, der einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne schneidet und einen gegebenen Radius hat. L. 68.

14) Einen Kreis mit gegebenem Radius zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis a) in einem Durchmesser desselben, b) unter einer gegebenen Sehne schneidet.

15) Einen Kreis mit gegebenem Radius zu construiren, der eine gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne schneidet.

16) Einen Kreis mit gegebenem Radius zu construiren, der einen gegebenen Kreis berührt und eine gegebene Gerade unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

17) Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Radius hat und jeden von zwei gegebenen Kreisen unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

---

18) In einem gegebenen Kreis drei gleich große Kreise zu construiren, welche sich gegenseitig von außen und den gegebenen Kreis von innen berühren. Vergl. Aufgabe 8 dieses §.

19) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck drei gleiche Kreise zu construiren, von denen jeder die beiden übrigen und zwei Seiten des Dreiecks berührt. Anal. mittelst der Mittellinien des Dreiecks.

20) In ein gegebenes Quadrat vier gleiche Kreise zu zeichnen, so daß jeder von ihnen zwei der übrigen und zwei Seiten berührt.

V. Capitel.

Proportionalität gerader Linien und Aehnlichkeit der Figuren.

§ 26. Vom Messen gerader Linien.

Erklärung: Jede gerade Linie, welche sich auf einer anderen Geraden ohne Rest abtragen läßt, heißt ein aliquoter Theil, oder ein Maß der letzteren. Eine Linie durch eine andere messen heißt angeben, wie oft sich die letztere ohne Rest auf der ersteren abtragen läßt. Ist m ein Maß von a, so heißt a ein Vielfaches von m.

Durch das Messen einer Linie erhält man für dieselbe eine Zahl (ihren Zahlenwerth, oder ihre Maßzahl). Daher kann man die Regeln der Arithmetik auf Linien, d. h. auf die Maßzahlen derselben, anwenden, oder mit denselben rechnen. Zu diesem Zweck müssen alle in derselben Rechnung vorkommenden Linien auf dasselbe Maß (gemeinschaftliches Maß) bezogen sein.

Anmerkung: Das Maß einer Linie ist die Einheit ihrer Maßzahl.

Lehrsätze 82. Ist eine Linie m ein Maß zweier Linien a, b, so ist sie auch ein Maß ihrer Summe $a + b$ und ihrer Differenz $a - b$.

Ist eine Linie ein Maß mehrerer anderer Linien, so ist sie auch ein Maß jeder (algebraischen) Summe derselben.

Ist eine Linie ein Maß einer anderen, so ist sie auch ein Maß eines jeden Vielfachen derselben.

Ist eine Linie ein Maß einer anderen, so ist auch jeder aliquote Theil der ersteren ein Maß des letzteren.

Die Beweise dieser Lehrsätze lassen sich leicht durch Abtragen des Maßes auf den betreffenden Linien führen. Es sind übrigens diese Sätze nur specielle Anwendungen allgemeiner, d. i. für Größen aller Art geltenden Lehren auf Linien. Vergl. Arithmetik. Anhang 2.

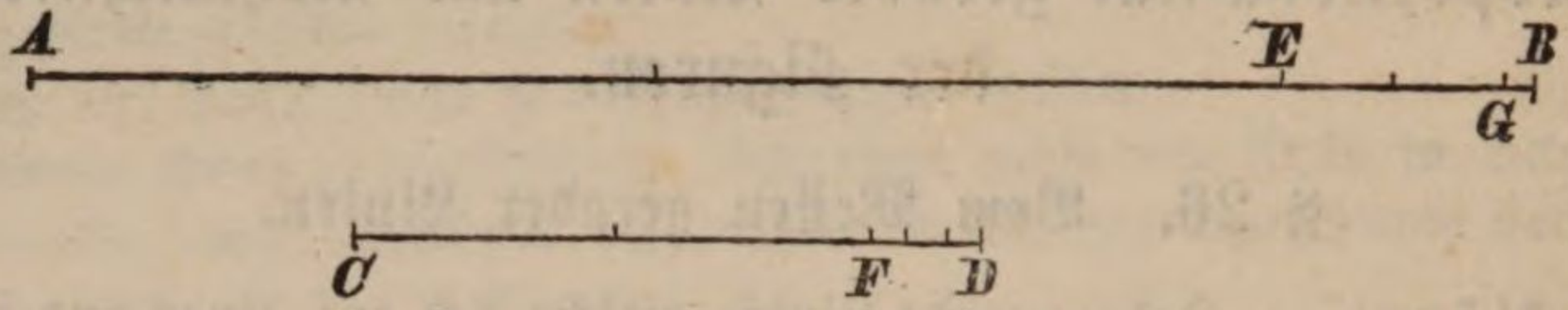
Anmerkung: Dagegen ist ein Maß einer Linie nicht nothwendig auch ein Maß eines aliquoten Theiles derselben, und ein Vielfaches des Maßes einer Linie nicht nothwendig auch ein Maß der letzteren.

Zusatz: Haben zwei oder mehrere Linien ein gemeinschaftliches Maß, so haben sie unzählig viele gemeinschaftliche Maße, denn jeder aliquote Theil des ersteren ist wieder ein gemeinschaftliches Maß derselben. Da aber jedes Maß einer Linie nicht größer, als diese selbst sein kann, so folgt, daß eins der gemeinschaftlichen Maße mehrerer Linien das größte sein muß.

Aufgabe 24: Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Linien zu finden.

Auflösung: Man trage die kleinere CD der beiden Linien so oft als möglich auf der größeren AB ab. Bleibt ein Rest EB, so trage man diesen so oft als möglich auf der Linie CD ab, und wenn hierbei wieder ein Rest FD bleibt, so trage man denselben so oft als möglich auf dem

vorigen Reste EB ab, und fahre so fort, indem man immer den zuletzt gebliebenen Rest auf dem vorhergehenden abträgt, bis entweder kein Rest bleibt, oder man sich überzeugt, daß man auf diese Weise nie zu einer



Theilung ohne Rest gelangen kann. Im ersteren Falle ist der letzte Rest das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Linien AB und CD, im letzteren haben dieselben kein gemeinschaftliches Maß.

Beweis. 1) Es gehe z. B. der auf EB gebliebene Rest GB in FD auf, so ist GB ein Maß von FD und folglich auch ein Maß des Vielfachen EG von FD. Da aber GB auch ein Maß von sich selbst ist, so ist es auch ein Maß der Summe $EG + GB$, oder der Linie EB. Hieraus folgt weiter, daß GB auch ein Maß des Vielfachen CF von EB, und folglich auch ein Maß der Summe $CF + FD = CD$ ist. Endlich ergiebt sich hieraus, daß GB ein Maß des Vielfachen AE von CD und mithin auch ein solches der Summe $AE + EB = AB$ ist. Also ist GB ein gemeinschaftliches Maß der Linien AB und CD.

2) Es sei m irgend ein anderes Maß von AB und CD, so ergiebt sich umgekehrt, daß m auch ein Maß des Vielfachen AE von CD und somit auch ein solches der Differenz $AB - CD = EB$ sein muß. Hieraus folgt in gleicher Weise, daß m auch ein Maß von CF, also auch von $CD - CF = FD$, also auch von EG, und endlich auch ein solches von $EB - EG = GB$ sein muß. Daher kann m nicht größer als GB sein, GB ist also das größte gemeinschaftliche Maß von AB und CD.

3) Man sieht aber leicht ein, daß sich dieselbe Beweisführung bei jeder beliebigen Anzahl der einzelnen Reste anwenden läßt, sobald nur schließlich ein Rest erhalten wird, welcher ein aliquoter Theil des vorhergehenden ist.

4) Tritt dieser letztere Fall aber niemals ein, so kann es kein gemeinschaftliches Maß m der beiden Linien AB, CD geben, denn wäre ein solches vorhanden, so müßte es zufolge der Beweisführung unter 2) auch ein Maß jedes der Reste sein, welche bei dem obigen Verfahren erhalten werden. Jeder dieser Reste muß nun kleiner sein als der vorhergehende, und wenn durch a die Maßzahl von AB, durch b die Maßzahl von CD in Beziehung auf das Maß m bezeichnet wird, so ist also der erste Rest kleiner als CD, oder kleiner als b. m, mithin kann derselbe (da er ein Vielfaches von m ist) höchstens gleich $(b-1)\,m$ sein. Aus dem gleichen Grunde kann der zweite Rest nicht größer als $(b-2)\,m$ sein u. s. w., woraus folgt, daß man schließlich (und zwar höchstens nach $(b-1)$ maliger Wiederholung) auf einen Rest kommen muß, welcher gleich m ist, und welcher, im Gegensatz zu der Annahme, in den vorhergehenden Rest aufgehen würde.

Erklärung der Begriffe incommensurabele und commensurabele Linien.

Zusatz: Sind drei oder mehr Linien gegeben, so findet man das größte gemeinschaftliche Maß derselben (falls ein solches vorhanden ist), indem man zunächst das größte gemeinschaftliche Maß zu zweien derselben bestimmt, dann zu diesem letzteren und einer dritten Linie (oder dem ebenso bestimmten größten gemeinschaftlichen Maße zweier anderer) wieder das größte gemeinschaftliche Maß sucht, und so fortfährt, bis alle gegebenen Linien mit einander verbunden sind.

Denn das größte gemeinschaftliche Maß p von a, b und c ist als ein Maß von a und b in ihrem gemeinschaftlichen Maße m enthalten, also ist das größte gemeinschaftliche Maß von m und c zugleich das größte von a, b und c.

Erklärung und Aufgabe 25: Das Verhältniß zweier Strecken a, b ist die Angabe, wie oft ein gemeinschaftliches Maß derselben in beiden enthalten sei, d. i. das Verhältniß (Arithm. Anhang 1) ihrer Maßzahlen in Beziehung auf ein gemeinschaftliches Maß. Hiermit ist zugleich die Lösung der Aufgabe 25 gegeben, das Verhältniß zweier gegebener Strecken zu bestimmen.

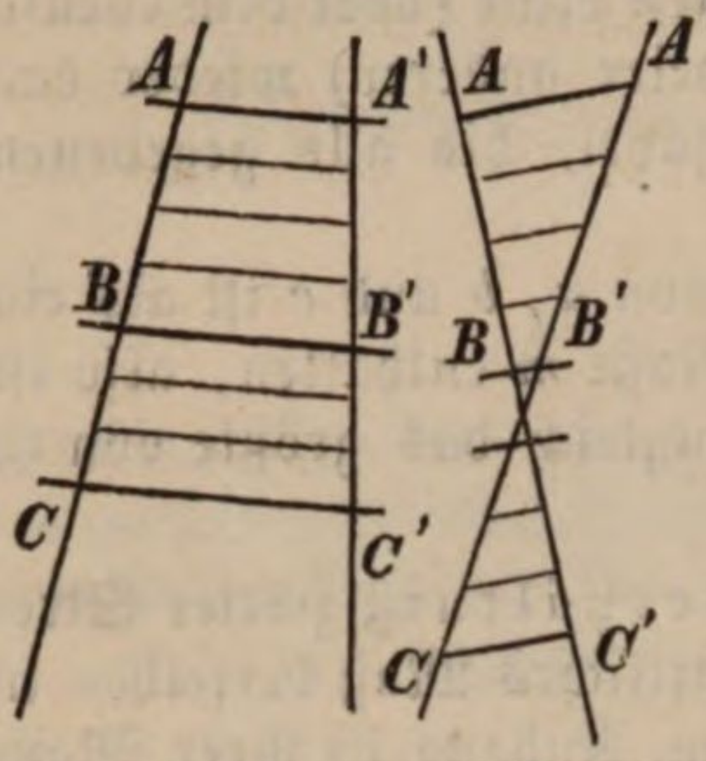
Sind diese beiden Strecken A, B incommensurabel, so kann man sich beide durch einen aliquoten Theil k der einen von ihnen (B) getheilt denken, wobei auf der anderen (A) ein Rest bleibt, welcher kleiner als k ist. Es sei $B = m.\ k$, $A = n.\ k + l$ $(l < k)$, so kann man sagen, das Verhältniß von A zu B sei größer als $\frac{n}{m}$, aber kleiner als $\frac{n+1}{m}$. Nimmt man nun für k verschiedene, immer kleiner werdende aliquote Theile von B an, so wird auch der Rest l beständig kleiner, und kann unter jeden beliebigen bestimmten Werth gebracht werden, da man zu diesem Zweck nur nöthig hat, k gleich diesem Werth oder kleiner als denselben anzunehmen. Daher nähern sich die Verhältnisse $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ ebenfalls beständig einer zwischen ihnen liegenden gemeinschaftlichen Grenze, und diese letztere, welche sich zwar durch keine ganzen Zahlen vollkommen genau ausdrücken läßt, die jedoch deshalb nicht weniger existirt, und der man durch das beschriebene Verfahren so nahe kommen kann, als man will, ist das Verhältniß von A zu B. Man nennt ein solches Verhältniß zweier incommensurabeln Linien ein irrationales, dagegen ein Verhältniß commensurabler Linien ein rationales.

Anmerkung: Alle in diesem Paragraph für begrenzte gerade Linien abgeleiteten Sätze gelten allgemein für Größen aller Art, also z. B. auch für Winkel, Flächen u. s. w., da sie sich für diese in gleicher Weise ableiten lassen.

§ 27. Proportionen bei geraden Linien.

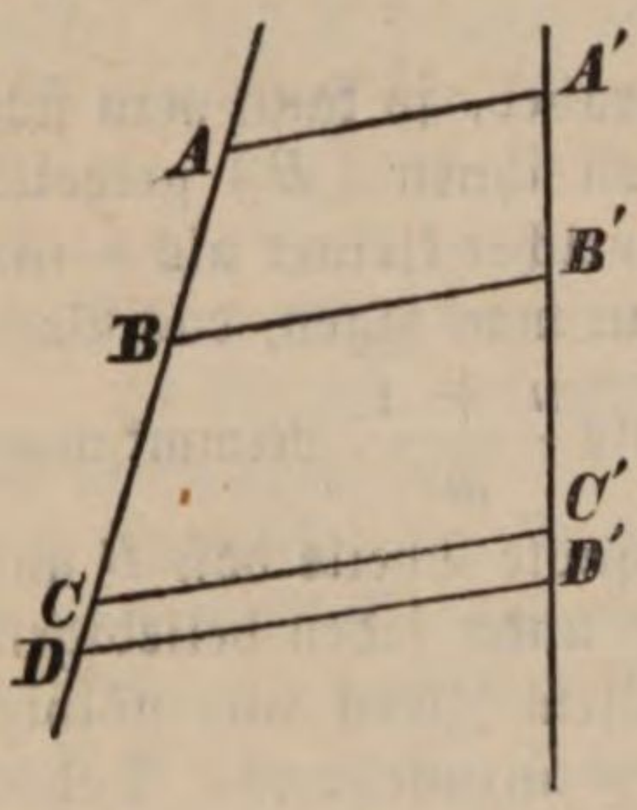
Lehrsatz 83. Zieht man zwischen zwei convergenten Geraden beliebige unter sich parallele Linien, so verhalten sich je zwei Abschnitte der einen Convergenten zu einander, wie die entsprechenden Abschnitte der anderen.

Beweis: Sind AA', BB', CC' einander parallel, und sind 1) die Abschnitte AB und BC commensurabel, so theile man dieselben durch ein gemeinschaftliches Maß in gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte



parallele Linien zu den Parallelen AA', BB', CC'. Dieselben theilen nach L. 59 auch die Strecken $A'B'$ und $B'C'$ in unter sich gleiche Theile, deren Anzahl bezüglich mit der Anzahl der Theile von AB und BC übereinstimmt. Ist nun m die Anzahl der Theile von AB und $A'B'$, n die der Theile von BC und $B'C'$, also $m + n$ die der Theile von AC und $A'C'$, so ist $AB : BC : AC = m : n : (m + n)$, und $A'B' : B'C' : A'C' = m : n : (m + n)$, also $AB : BC : AC = A'B' : B'C' : A'C'$.

Sind aber 2) AB und BC incommensurabel und nimmt man an, die Proportion $AB : BC = A'B' : B'C'$ wäre unrichtig, so muß es doch eine



Strecke BE geben, für welche $AB : BE = A'B' : B'C'$ ist, sei es nun, daß BE kleiner oder größer als BC ist. Wie klein aber auch der Unterschied CE zwischen BC und BE sein mag, es kann doch immer ein Maß von AB gefunden werden, welches noch kleiner ist, und theilt man AB mit diesem Maße und trägt dasselbe weiterhin von B nach E ab, so muß ein Theilpunkt D zwischen C und E fallen. Es sind dann AB und BD commensurable Linien, und zieht man DD' parallel zu CC', so ist nach dem ersten Theile dieses Beweises:

$AB : BD = A'B' : B'D'$. Nach der Annahme ist aber
$AB : BE = A'B' : B'C'$.

Da nun $BD < BE$ und $B'D' > B'C'$ ist, so widersprechen sich diese beiden Proportionen, woraus folgt, daß die Annahme falsch, oder daß auch hier $AB : BC = A'B' : B'C'$ ist.

Zusatz 1: In dem vorstehenden Satze kann der Durchschnittspunkt der beiden Convergenten an die Stelle einer Parallelen treten.

Der Beweis erleidet hierdurch keine Aenderung.

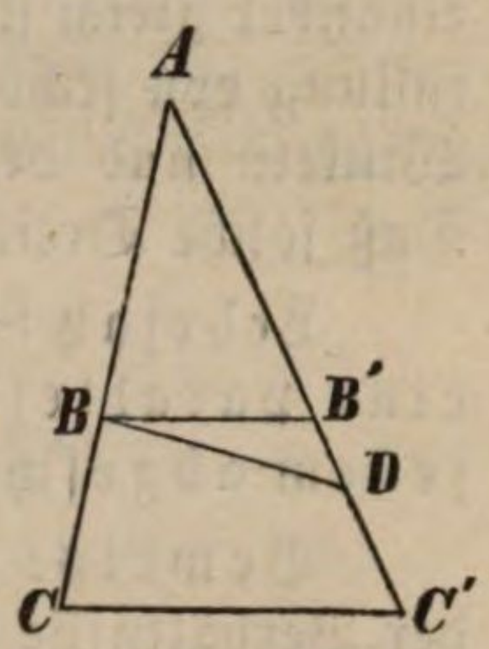
Zusatz 2: Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so theilt dieselbe die anderen Seiten in gleichem Verhältnisse.

Zusatz 3: Durch Vertauschung der Glieder der Proportionen (Arithm. Anhang 1) erhält man den Satz, daß je zwei zwischen denselben Parallelen liegende Stücke der Convergenten in demselben Verhältniß zu einander stehen. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so verhalten sich die oberen (d. h. dem Durchschnittspunkt der anderen Seiten anliegenden) Abschnitte der geschnittenen Seiten, wie die unteren und wie die ganzen Seiten.

Frage: Behält der Satz 83 auch seine Gültigkeit, wenn statt der Convergenten zwei parallele Linien genommen werden?

Lehrsatz 84. (Umkehrung.) Theilt man zwei Seiten eines Dreiecks (von dem gemeinschaftlichen Eckpunkt aus) in zwei Theile, welche in gleichem Verhältniß stehen, so ist die Verbindungslinie der Theilpunkte der dritten Seite parallel.

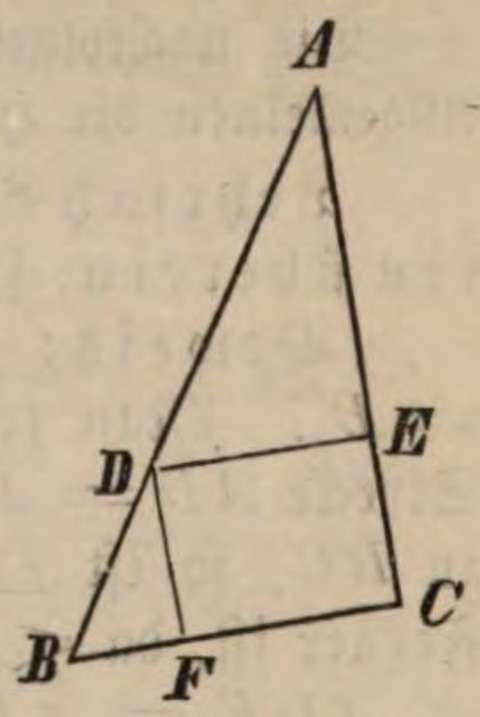
Beweis: Ist $AB : BC = AB' : B'C'$ und also auch $AB : (AB + BC) = AB' : (AB' + B'C')$ oder $AB : AC = AB' : AC'$, und zieht man durch B zu CC' eine Parallele BD, so ist $AB : AC = AD : AC'$, also $AD = AB'$, d. h. D fällt mit B', und folglich auch BB' mit der Parallelen zusammen.



Frage: Wie kann man diesen Satz allgemein auf zwei oder mehrere proportionirte Abschnitte beliebiger Convergenten ausdehnen?

Lehrsatz 85. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so verhält sich die letztere zu der parallelen Seite, wie der obere Abschnitt einer der anderen Seiten zu dieser ganzen Seite.

Beweis. Ist DE parallel zu BC, so ziehe man DF parallel zu AC, dann ist (L. 83) $AD : AB = CF : BC$. Nun ist $CF = DE$ (L. 43, Zus. 1), also auch $AD : AB = DE : BC$.



Frage: Wie läßt sich dieser Satz allgemein auf Parallellinien anwenden, die zwischen zwei anderen Geraden gezogen sind?

Läßt sich der Lehrsatz 85 umkehren? Welche Bedingung muß zu diesem Zweck hinzugefügt werden?

Sätze zu § 27.

1) Werden mehrere durch denselben Punkt gehende Gerade von zwei oder mehreren Parallelen geschnitten, so stehen die entsprechenden Abschnitte dieser Geraden sämmtlich in demselben Verhältniß zu einander. — 2) Werden mehrere von demselben Punkt ausgehende Gerade von zwei Parallelen geschnitten, so stehen die entsprechenden Abschnitte dieser Parallelen in demselben Verhältniß zu einander. — 3) Umgekehrt, werden zwei Parallellinien durch andere Gerade so geschnitten, daß die entsprechenden Abschnitte der ersteren in demselben Verhältniß stehen, so schneiden sich die anderen Geraden in einem Punkte. In welchem besonderen Falle sind sie einander parallel? — 4) Werden drei Gerade, welche sich in einem Punkte treffen, von zwei anderen Geraden so geschnitten, daß die entsprechenden Abschnitte der letzteren im gleichen Verhältniß zu einander stehen, so sind diese zwei Geraden parallel. — 5) Werden zwei über derselben Grundlinie stehende Dreiecke, welche gleiche Höhen haben, durch eine der Grundlinie parallele Gerade getheilt, so sind die innerhalb der Dreiecke liegenden Abschnitte dieser Geraden einander gleich.

§ 28. Aehnlichkeit der Dreiecke.

Erklärungen: Die Uebereinstimmung geometrischer Gebilde in der Gestalt heißt Aehnlichkeit. Das Zeichen derselben ist $\sim$. Bei zwei geradlinigen ebenen Figuren findet dieselbe statt, wenn je zwei entsprechende Winkel derselben, sowie die Verhältnisse je zweier entsprechender Seiten einander gleich sind. Zur Aehnlichkeit zweier Dreiecke gehört also die Erfüllung von sechs Bedingungen, nämlich dreier Gleichungen zwischen den Winkeln und dreier Gleichungen zwischen den Verhältnissen der Seiten. Daß solche Dreiecke möglich sind, folgt aus dem

Lehrsatz 86. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so ist das durch dieselbe von jenem abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

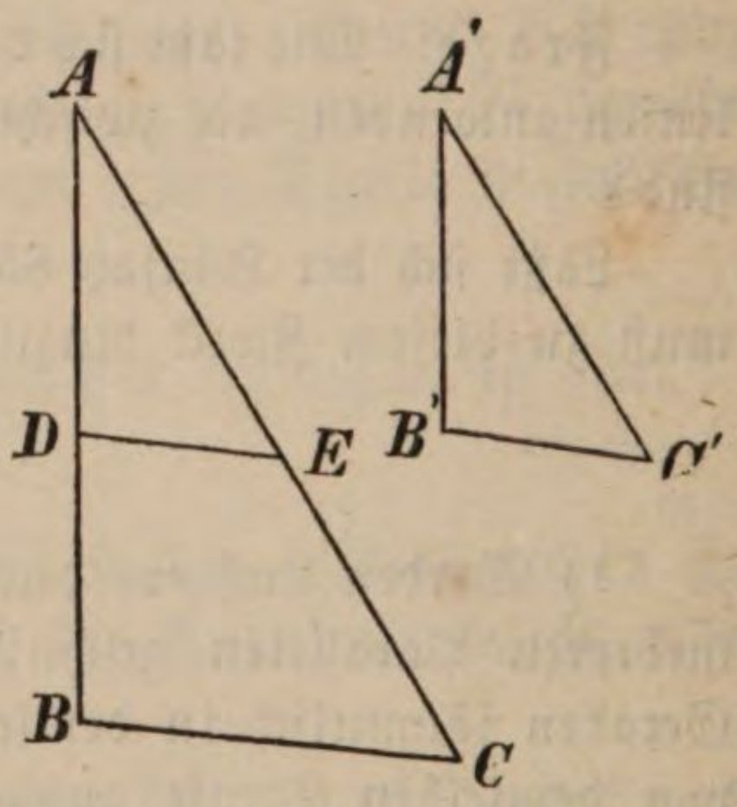
Beweis: Die Gleichheit der homologen Winkel folgt aus L. 9, die der Verhältnisse der homologen Seiten aus L. 83, Zus. 2. L. 85.

Anmerkung: Da aus der Gleichheit zweier Winkelpaare die der dritten, und aus zwei Proportionen zwischen den Seiten auch die dritte von selbst folgt (Ist $a : a' = b : b'$ und $a : a' = c : c'$, so ist $b : b' = c : c'$), so reduciren sich die sechs Bedingungen der Aehnlichkeit zweier Dreiecke auf vier.

Die nachfolgenden Aehnlichkeitssätze zeigen, daß auch von diesen im Allgemeinen die Hälfte zum Nachweis der Aehnlichkeit genügt.

Lehrsatz 87. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkelpaaren überein, so sind sie ähnlich.

Beweis: Es sei $\sphericalangle A = A'$, $\sphericalangle B = B'$. Man trage auf AB von A aus eine Strecke $AD = A'B'$ ab und ziehe DE parallel zu BC, so ist $\triangle ADE \sim A'B'C$ (L. 86). Ferner ist, da $\sphericalangle A = A'$ nach Voraussetzung, $\sphericalangle ADE = ABC$ (L. 9) und $\sphericalangle ABC = A'B'C'$ nach Voraussetzung, also auch $\sphericalangle ADE = A'B'C'$, endlich $AD = A'B'$ nach Construction ist, $\triangle ADE \cong A'B'C'$, daher auch $A'B'C' \sim ABC$.



Zusatz: Daher sind in diesen Dreiecken auch die Verhältnisse der homologen Seiten gleich.

Lehrsatz 88. Stimmen zwei Dreiecke in einem Seitenverhältniß und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie ähnlich. (Fig. L. 87.)

Beweis: Ist $AB : AC = A'B' : A'C'$ und $\sphericalangle A = A'$, so trage man von A aus auf AB eine Strecke $AD = A'B'$ ab und ziehe DE parallel zu BC. Dann ist $\triangle ADE \sim ABC$ (L. 86). Ferner ist $AB : AC = AD : AE$, daher auch $A'B' : A'C' = AD : AE$, und da $A'B' = AD$ ist, nach Construction, so ist auch $AE = A'C'$. Daher folgt, daß $\triangle ADE \cong A'B'C'$ (L. 31), und mithin auch $\triangle A'B'C' \sim ABC$ ist.

Frage: Welche anderen Beziehungen bestehen noch zwischen Seiten oder Winkeln der beiden Dreiecke?

Lehrsatz 89. Stimmen zwei Dreiecke in einem Seitenverhältniß und in dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel überein, so sind dieselben ähnlich. (Fig. L. 87.)

Beweis. Ist $AB : AC = A'B' : A'C'$, $\sphericalangle B = B'$, $AC > AB$ (und daher auch $A'C' > A'B'$), so construire man, wie in den beiden vorigen Sätzen das dem Dreieck ABC nach L. 86 ähnliche Dreieck ADE. Dann ist $AB : AC = AD : AE$, also $AD : AE = A'B' : A'C'$, also $AE = A'C'$. Ferner ist $\sphericalangle ADE = ABC$, also auch $\sphericalangle A'B'C' = ADE$ Es ist also das Dreieck $A'B'C'$ dem Dreieck ADE nach L. 32 congruent, und mithin ebenfalls dem Dreieck ABC ähnlich.

Frage, wie vorher.

Lehrsatz 90. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Verhältnissen homologer Seiten überein, so sind sie ähnlich. (Fig. L. 87.)

Beweis. Ist $AB : AC = A'B' : A'C'$, $AB : BC = A'B' : B'C'$ und, wie vorher, das dem Dreieck ABC ähnliche Dreieck ADE construirt, so ist 1) $AB : AC = AD : AE$, woraus in Verbindung mit der vorausgesetzten Proportion $AB : AC = A'B' : A'C'$ und $A'B' = AD$ wieder $A'C' = AE$ folgt. 2) ist $AB : BC = AD : DE$, und da nach Voraussetzung $AB : BC = A'B' : B'C'$ und nach Construction $AD = A'B'$ ist, so ist auch $DE = B'C'$. Mithin ist nach L. 33 $\triangle A'B'C' \cong ADE$ und mithin auch $\triangle A'B'C' \sim ABC$.

Frage, wie vorher.

Sätze zu § 28.

1) Zwei Dreiecke, deren Seiten paarweise parallel sind, sind ähnlich. L. 18. — 2) Zwei Dreiecke, deren Seiten paarweise senkrecht zu einander stehen, sind ähnlich. — 3) In jedem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten umgekehrt, wie die zu ihnen gehörigen Höhen. L. 87. — 4) In ähnlichen Dreiecken verhalten sich je zwei homologe Seiten, wie die zu ihnen gehörigen Höhen. — 5) Alle rechtwinkeligen Dreiecke, welche in einem spitzen Winkel übereinstimmen, sind ähnlich. — 6) Alle gleichschenkeligen Dreiecke, welche in den Winkeln an der Spitze übereinstimmen, sind ähnlich. — 7) Wenn in zwei Dreiecken ein Paar Winkel gleich ist und die zu den einschließenden Seiten gehörigen Höhen gleiche Verhältnisse bilden, so sind die Dreiecke ähnlich. — 8) Wenn in zwei Dreiecken sich zwei Seiten wie die Radien der umbeschriebenen Kreise verhalten und ein an ihnen liegender Winkel in beiden gleich ist, so sind die Dreiecke ähnlich. — 9) Verlängert man je zwei homologe Seiten zweier ähnlicher Dreiecke bis zu ihrem Durchschnittspunkt, so schneiden sich dieselben für alle drei Paare unter demselben Winkel.

§ 29. Unmittelbare Folgerungen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

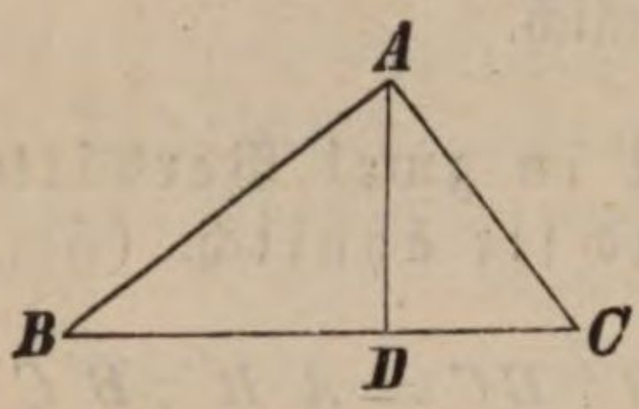
a) Proportionen bei dem Dreieck.

Lehrsatz 91. Fällt man in einem rechtwinkeligen Dreieck von der Spitze des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so theilt dieselbe das Dreieck in zwei kleinere Dreiecke, welche einander und dem ganzen Dreieck ähnlich sind.

Beweis durch L. 87.

Lehrsatz 92. a) Das von der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den von ihm gebildeten Abschnitten der Hypotenuse und b) jede Kathete ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem ihr anliegenden Abschnitt der Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse.

Beweis: L. 91.



Lehrsatz 93. In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Quadrate (d. i. der zweiten Potenzen der Maßzahlen) der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse.

Beweis: Ist BAC der rechte Winkel und AD senkrecht zur Hypotenuse BC, so ist nach L. 92:

$$BC : AB = AB : BD, \text{ oder } AB^2 = BC \cdot BD$$

und $$BC : AC = AC : CD, \text{ oder } AC^2 = BC \cdot CD,$$

also ist auch $AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC \cdot (BD + CD) = BC \cdot BC = BC^2$.

Anmerkung 1: Vorstehender Lehrsatz heißt nach seinem Erfinder der pythagoreische Lehrsatz.

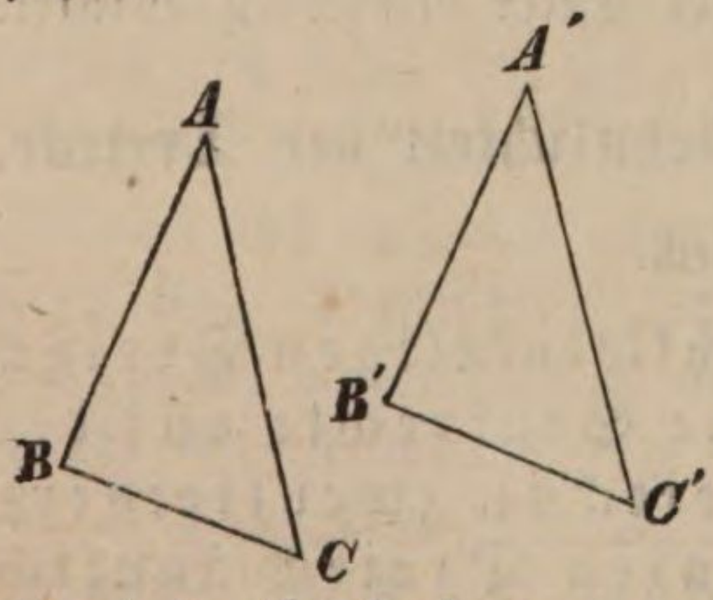
Vergleiche L. 114.

Anmerkung 2: Sofern im Vorstehenden oder späterhin von einem Product von Linien, oder einer Potenz einer Linie die Rede ist, kann darunter nur das Product (oder die Potenz) der Maßzahlen, abgesehen von ihrer Benennung verstanden werden, denn ein Product zweier benannter Zahlen hat keinen Sinn.

Zusatz 1: Das Quadrat einer jeden Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Quadrat der Hypotenuse minus dem Quadrate der anderen Kathete.

Zusatz 2: Durch zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks ist die Länge der dritten bestimmt und es kann stets die letztere aus den ersteren berechnet werden. Sind a und b die Maßzahlen der Katheten, c die der Hypotenuse, so ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Man kann daher auch $a = \sqrt{(c-b)(c+b)}$, $b = \sqrt{(c-a)(c+a)}$ setzen.



Lehrsatz 94. (Umkehrung von 93.) Ist in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich der Summe (oder der Differenz) der Quadrate der anderen Seiten, so ist das Dreieck ein rechtwinkeliges.

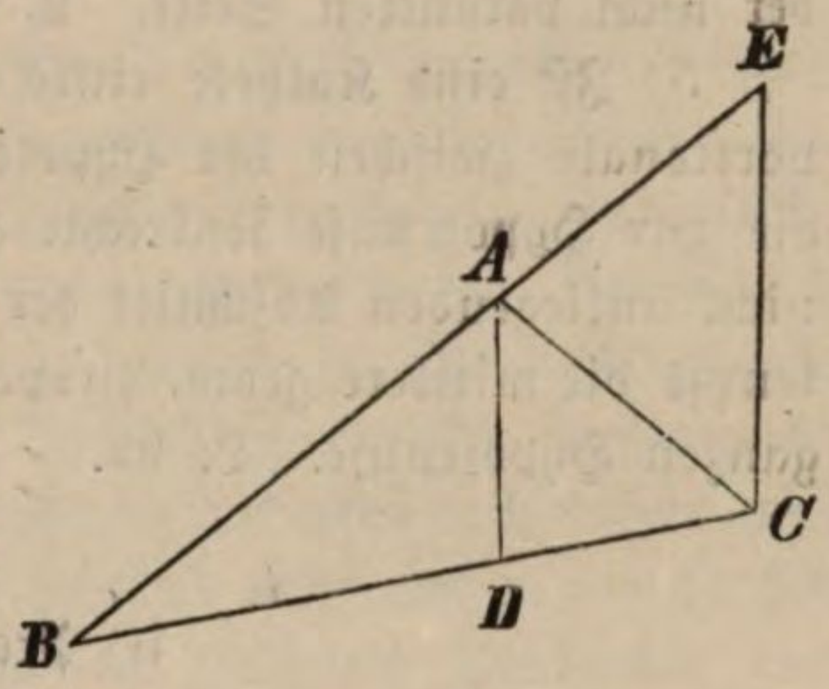
Beweis: Ist im Dreieck ABC $AC^2 = AB^2 + BC^2$, so construire man ein zweites Dreieck $A'B'C'$, so daß $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ und $\sphericalangle A'B'C' =$

90^0 ist, so ist nach L. 93 $A'C'^2 = B'C'^2 + A'B'^2$, also auch $A'C'^2 = BC^2 + AB^2$, und da nach Voraussetzung $BC^2 + AB^2 = AC^2$ ist, so ist $A'C'^2 = AC^2$, also $A'C' = AC$, daher $\triangle ABC \cong A'B'C'$ (L. 33), also $\sphericalangle ABC = A'B'C' = 90^0$.

Anmerkung: Ein einfaches Beispiel zu diesem Satze bietet das sogenannte ägyptische Dreieck, dessen Seiten die Maßzahlen 3, 4, 5 haben. — Anwendung desselben zur Construction rechter Winkel. — Vergleiche Anhang 5.

Welcher Winkel ist jedesmal der rechte?

Lehrsatz 95. Jede Halbirungslinie eines Winkels in einem Dreieck theilt die gegenüberliegende Seite so, daß die Abschnitte sich verhalten, wie die an ihnen liegenden Seiten des Dreiecks.



Beweis: Halbirt AD im Dreieck ABC den Winkel BAC, so verlängere man BA über A hinaus um $AE = AC$ und ziehe EC, so ist $\sphericalangle AEC = ACE$ (L. 22) und $\sphericalangle BAC = AEC + ACE$ (L. 19) $= 2\,AEC$, daher $\sphericalangle BAD = AEC$, also $AD \parallel EC$ (L. 7, Zus.), mithin $BA : AE = BD : DC$ (L. 83, Zus. 2), oder, da $AE = AC$ ist, $BA : AC = BD : DC$.

Zusatz: Halbirt man einen Außenwinkel EAC, so theilt die Halbirungslinie die Grundlinie auf ihrer Verlängerung ebenfalls im Verhältniß der anliegenden Seiten, sofern man unter den Abschnitten der Grundlinie die Abstände des Durchschnittspunktes von den beiden Endpunkten derselben versteht.

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich, nur muß man, statt AC über A hinaus zu verlängern, eine Strecke $AE' = AC$ auf AB von A aus abtragen.

Es wird hierbei vorausgesetzt, daß $AB > AC$ sei. Wie gestaltet sich der Satz, wenn $AB = AC$ ist?

Anmerkung: Halbirt man einen inneren und zugleich den ihm anliegenden Außenwinkel eines Dreiecks, so theilen die beiden Halbirungslinien die Gegenseite in gleichem Verhältniß oder harmonisch. Ueber die harmonische Theilung siehe Anhang 9.

Lehrsatz 96. Umgekehrt wird durch die Verbindungslinie eines Eckpunktes eines Dreiecks mit demjenigen Punkte der Gegenseite, welcher diese im Verhältniß der anliegenden Seiten theilt, der Winkel an jenem Eckpunkte halbirt.

Beweis ähnlich wie bei L. 95, mit veränderter Reihenfolge der Schlüsse oder indirect.

Zusatz: In gleicher Weise läßt sich der Zusatz des L. 95 über die Halbirungslinie des Außenwinkels umkehren. Wie lautet die Umkehrung?

Sätze zu § 29.

1) Ist in einem Dreieck das Quadrat einer innerhalb des Dreiecks fallenden Höhe gleich dem Product der von ihr auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte,

so ist der Winkel an der Spitze des Dreiecks ein rechter. L. 88. Welche andere Umkehrung läßt sich zu L. 92 bilden? 2) Errichtet man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks in jedem ihrer Endpunkte eine Senkrechte bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung der gegenüberliegenden Kathete, so ist 1) das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Producte aus jeder Kathete und ihrer Verlängerung und 2) das Product der Katheten gleich dem Producte ihrer Verlängerungen. L. 87 oder L 92a. 93. 3) In jedem gleichschenkeligen Dreieck verhält sich der Schenkel zur Höhe, wie der obere Abschnitt des zum Schenkel gehörigen Höhenperpendikels zur Hälfte der Grundlinie. L. 87. 4) Ist in einem gleichschenkeligen Trapez die Diagonale gleich der größeren parallelen Seite, so ist die nicht parallele Seite die mittlere geom. Proportionale zwischen der größeren parallelen Seite und ihrem Ueberschuß über die kleinere, und das Product der parallelen Seiten ist gleich dem Quadrat der Diagonale minus dem Quadrat der nicht parallelen Seite. L. 87.

5) Ist eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks die mittlere geom. Proportionale zwischen der Hypotenuse und der anderen Kathete, und zieht man die zur Hypotenuse senkrechte Höhe, so ist die kleinere Kathete gleich dem ihr nicht anliegenden Abschnitt der Hypotenuse, und der größere Abschnitt der Hypotenuse die mittlere geom. Proportionale zwischen dem kleinern Abschnitt und der ganzen Hypotenuse. L. 92.

§ 30.

b) Proportionen bei dem Kreise.

Lehrsatz 97. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb desselben, so verhalten sich die Abschnitte der einen Sehne umgekehrt, wie die der anderen.

Beweis durch Verbindung von Endpunkten der Sehnen und L. 72, Zus. 1. L. 87.

Anmerkung: Die Abschnitte der einen Sehne bilden also die inneren, die der anderen die äußeren Glieder einer Proportion.

Zusatz 1: Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb desselben, so ist das Product der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Product der Abschnitte der anderen Sehne.

Zusatz 2: Wird eine Sehne eines Kreises durch eine zweite Sehne halbirt, so ist die Hälfte der letzteren die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten der ersteren.

Zusatz 3: Errichtet man auf einem Durchmesser eines Kreises eine Senkrechte bis zur Peripherie, so ist diese Senkrechte die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers.

Mit welchem früheren Satze stimmt dieser specielle Fall des Lehrsatzes 97 überein?

Lehrsatz 98. Gehen von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Secanten in denselben, so verhalten sich die ganzen Secanten umgekehrt, wie ihre äußeren Abschnitte.

Beweis: Ziehe zwei (sich innerhalb des Kreises schneidende) Verbindungslinien zwischen den Durchschnittspunkten der Secante und des Kreises und benutze L. 72, Zus. 1. L. 87.

Lehrsatz 99. Gehen von einem Punkte aus eine Tangente und eine Secante an einen Kreis, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äußeren Abschnitt.

Beweis: Verbinde den Berührungspunkt der Tangente mit den Durchschnittspunkten der Secante. L. 72, Zus. 1. L. 87.

Anmerkung: Der Lehrs. 99 konn als specieller Fall des Lehrs. 98 betrachtet werden. In wiefern?

Die drei Sätze 97. 98. 99 lassen sich in einen einzigen Satz zusammenfassen. Wie lautet derselbe?

Sätze zu § 30:

Umkehrungen von 97—99:

1) Schneiden sich zwei Linien in einem zwischen ihren Endpunkten liegenden Punkte so, daß die Abschnitte der einen die inneren, die der anderen die äußeren Glieder einer Proportion bilden, so läßt sich durch die vier Endpunkte eine Kreislinie beschreiben. Beweis indirect. Beschreibe durch drei Endpunkte einen Kreis. L. 97. — 2) Verhalten sich zwei von einem Punkte auslaufende Strecken zu einander umgekehrt, wie zwei in demselben Punkte anfangende Abschnitte derselben, so läßt sich durch die vier Endpunkte der ersteren Geraden und der Abschnitte eine Kreislinie legen. Beweis ähnlich wie vorher. — 3) Ist eine auf einer Geraden zwischen ihren Endpunkten errichtete Senkrechte das geometrische Mittel zwischen den durch ihren Fußpunkt gebildeten Abschnitten der Geraden, so liegt der Endpunkt der Senkrechten auf der Peripherie eines über der Geraden als Durchmesser beschriebenen Halbkreises. Beweis indirect. — 4) Gehen von einem Punkt zwei Gerade aus, so daß die eine das geometrische Mittel zwischen der anderen und einem in demselben Punkte anfangenden Abschnitt der letzteren ist, so berührt ein durch die drei anderen Endpunkte der beiden Linien und des Abschnittes gelegter Kreis die erstere Linie in ihrem Endpunkte. Beweis indirect.

5) Jede Tangente eines Kreises ist größer als der äußere Abschnitt einer von demselben Punkte ausgehenden Secante und kleiner als die ganze Secante. L. 99.

6) Ist eine Tangente eines Kreises doppelt so groß als der äußere Abschnitt einer von demselben Punkte ausgehenden Secante, so ist die ganze Secante viermal so groß als der äußere Abschnitt. L. 99.

7) Für alle Punkte P der Peripherie eines einem gegebenen concentrischen Kreises hat das Product der Abschnitte der von ihnen in den gegebenen Kreis gezogenen Sehnen denselben Werth. Beweis durch Tangenten von P oder Sehnen, die in P halbirt werden. L. 32.—L. 69.

Weitere Sätze s. im Anhang 10.

§ 31. Fundamental-Aufgaben zu § 27—30.

Aufgabe 26: Eine gegebene Strecke in mehrere Theile zu theilen, welche in gegebenem Verhältniß zu einander stehen.

Construction: Lege an die gegebene Strecke AB in einem ihrer

Endpunkte A eine beliebige Linie AC an, trage auf letzterer von A aus nach einander Linien ab, welche in dem gegebenen Verhältniß stehen, verbinde den letzten Endpunkt der abgetragenen Linien mit dem Endpunkt B von AB und ziehe durch die Endpunkte der übrigen Parallellinien zu der Verbindungslinie.

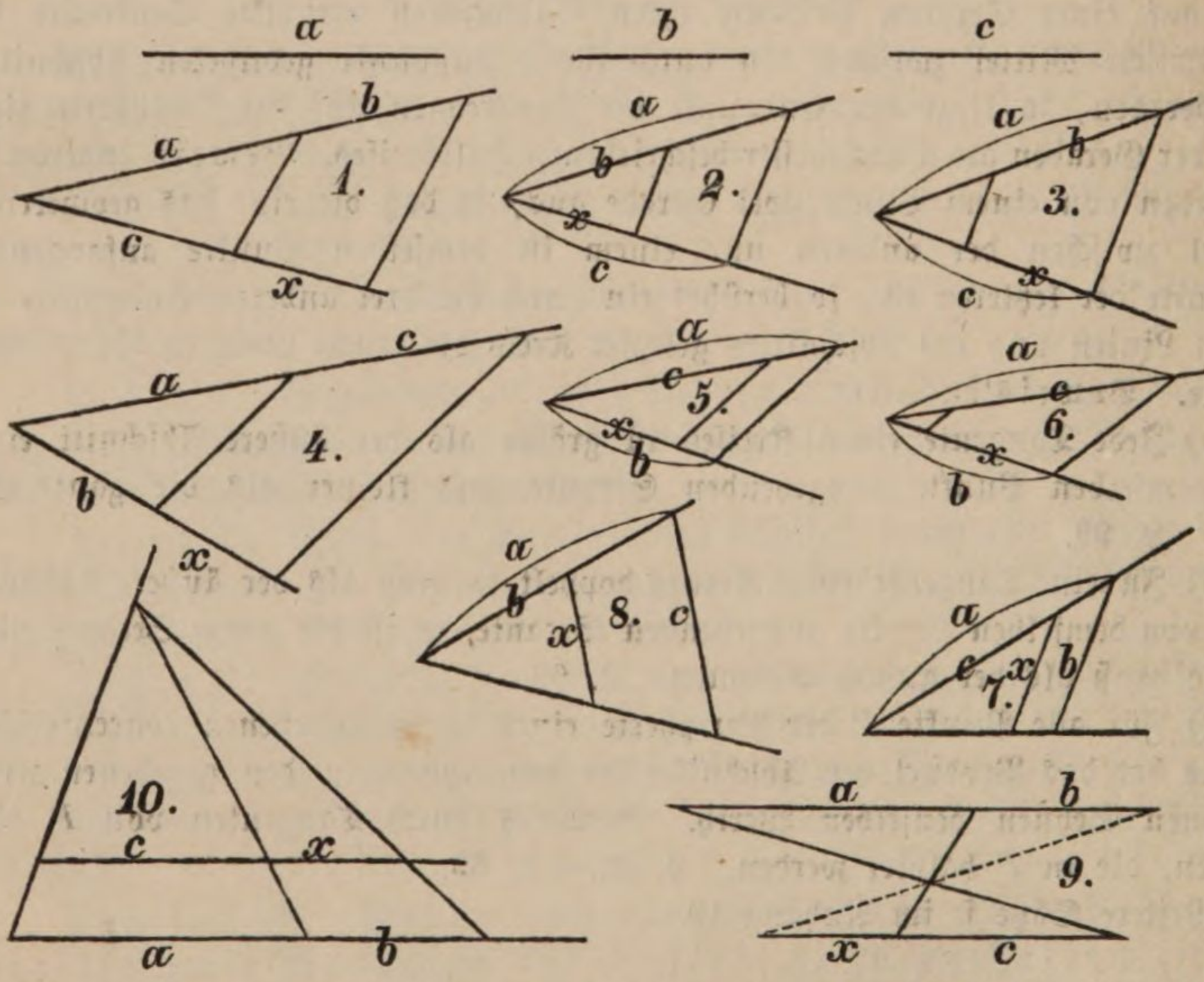
Beweis durch L. 83, Zuſ. 1.

Anmerkung: Auf eine andere Construction führt der Uebungsſatz 2 in § 27.

Das Verhältniß der Theile kann entweder durch Zahlen m, n, . . . oder durch Linien a', b', . . . , welche in dieſem Verhältniß ſtehen, gegeben ſein Im erſteren Fall findet man die auf der Convergenten abzutragenden Linien, indem man eine und dieſelbe beliebige Strecke zuerſt m mal, dann n mal u. ſ. w. auf ihr abträgt; im letzteren Falle trägt man die gegebenen Strecken a', b', . . . auf ihr ab.

Aufgabe 27. Zu drei gegebenen Linien a, b, c die vierte Proportionale zu conſtruiren, d. h. eine Linie x zu ſuchen, ſo daß $a : b = c : x$ iſt.

Die Conſtruction kann nach Anleitung des L. 83, Zuſ. 2, oder nach L. 83, Zuſ. 3, oder nach L. 85 auf mehrere Arten ausgeführt werden. Noch andere Conſtructionen liefert Satz 2 zu § 27. Die nachſtehenden Figuren erläutern die einzelnen Conſtructionen hinreichend.



Aufgabe 28: Zu zwei gegebenen Geraden a, b eine dritte Proportionale zu conſtruiren, d. h. eine Linie x zu ſuchen, ſo daß $a : b = b : x$ iſt.

Die Conſtruction kann wie in der vorigen Aufgabe ausgeführt

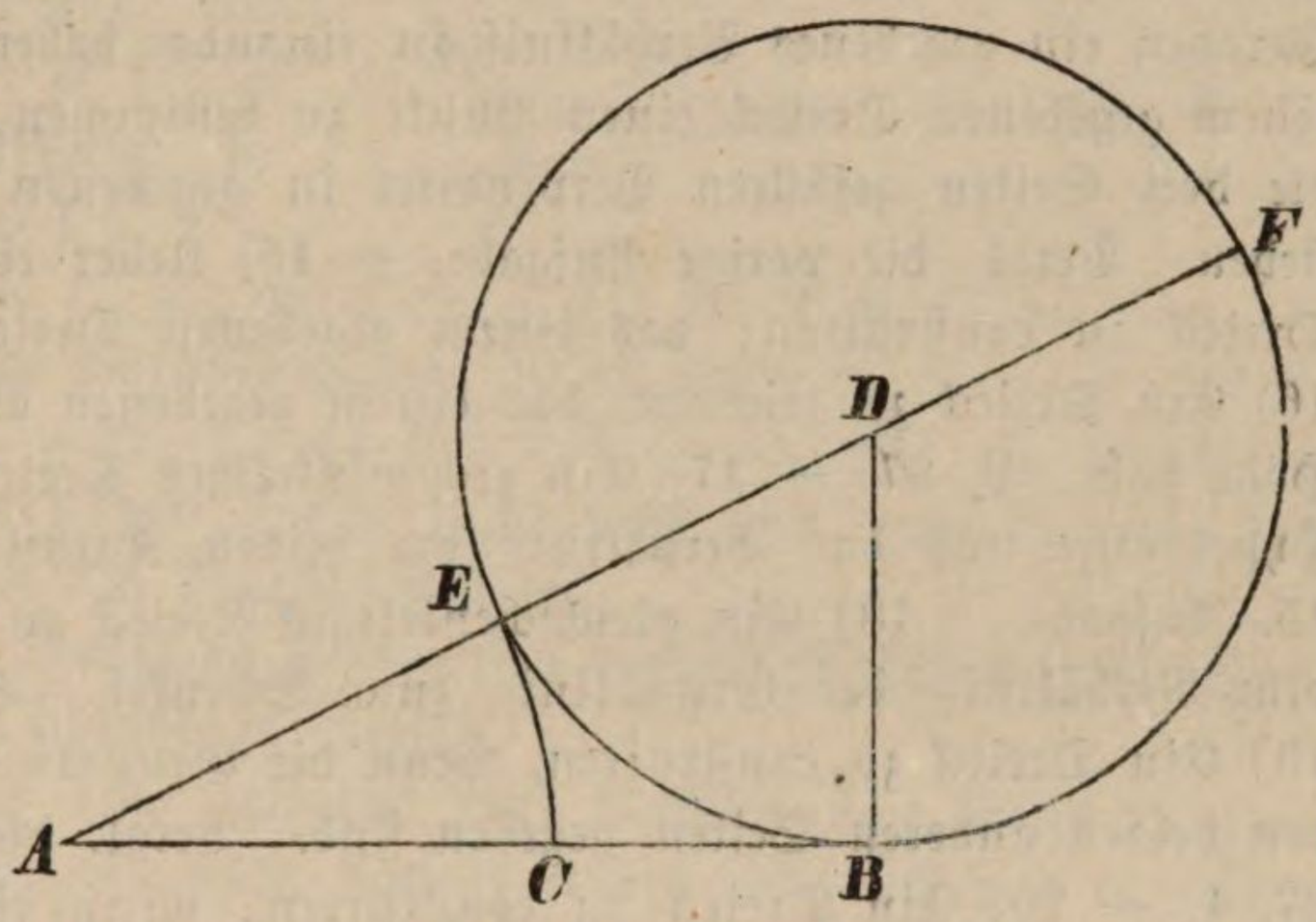
werden, indem man dort $c = b$ annimmt. Zu anderen Constructionen führen L. 92. L. 97, Zus. 2 und L. 99.

Aufgabe 29: Zu zwei gegebenen Geraden a, b die mittlere geometrische Proportionale zu construiren.

Construction nach L. 92 auf zwei verschiedene Arten, oder nach L. 97, Zus. 2, oder nach L. 99.

Aufgabe 30: Eine gegebene Gerade nach stetiger Proportion zu theilen, d. h. so, daß der größere Abschnitt derselben das geometrische Mittel zwischen der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitt ist. (Goldener Schnitt, Sectio aurea, Sectio divina.)

Construction: Es sei AB die zu theilende Linie. Man halbire AB in C, errichte auf AB in B eine Senkrechte BD gleich BC, ziehe AD, trage auf AD von D aus eine Strecke DE gleich DB und auf AB von A aus eine Strecke $AX = AE$ ab, so ist X der gesuchte Theilpunkt.



Beweis: Beschreibt man um D mit DB als Radius einen Kreis, so muß derselbe AD in E treffen und AB in B berühren. Verlängert man nun AD über D bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in F, so ist (L. 99) $AF : AB = AB : AE$, daher auch $(AF - AB) : AB = (AB - AE) : AE$. Nun ist $AE = AX$, $EF = 2\,ED = AB$, also $AF - AB = AE = AX$ und $AB - AE = AB - AX = BX$, also $AX : AB = BX : AX$, oder $AX^2 = AB \,.\, BX$.

Uebungsaufgaben:

1) Zwei Linien zu construiren, deren Summe und Verhältniß gegeben ist. A. 26. — 2) Zwei Linien zu construiren, deren Differenz und Verhältniß gegeben ist. L. 83. (A. 26.) — 3) Zu zwei gegebenen Linien a, b zwei andere x, y zu construiren, deren Verhältniß gegeben ist, so daß $a : x = y : b$ ist. Aufg. 27. 29. — 4) Zwei gerade Linien zu construiren, deren Summe gegeben ist, so daß eine andere gegebene Gerade das geometrische Mittel zwischen ihnen ist. L. 92. — 5) Ebenso, wenn statt der Summe die Differenz der Linien gegeben ist. L. 92. — 6) Zu drei gegebenen Linien a, b, c zwei andere x, y zu construiren, so daß $a : x = y : b$ und $x + y = c$ ist. L. 97. A. 12 zu § 23. — 7) Ebenso, nur daß $x - y = c$ ist. L. 98. — 8) Eine Gerade zu construiren, so daß das größere Stück derselben, wenn sie nach stetiger Proportion getheilt wird, einer gegebenen Geraden gleich sei. L. 99. Aufg. 17 zu § 22. — 9) Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, so daß sie in demselben in gegebenem

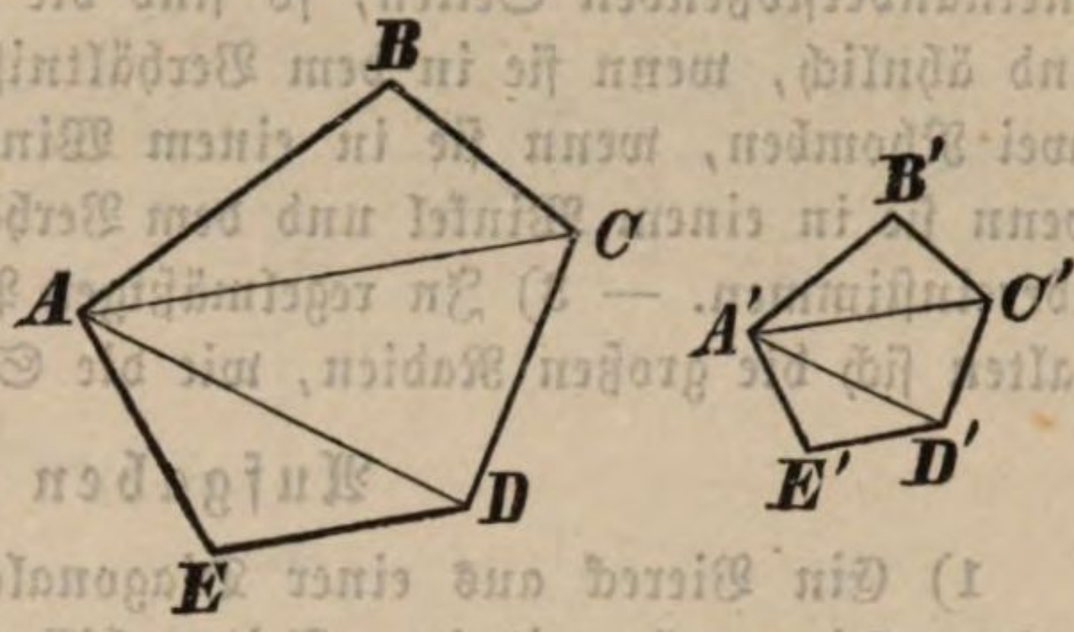
Verhältnisse getheilt werde. L. 83, Zus. 2, oder L. 85. — 10) Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß die dadurch von den Schenkeln abgeschnittenen Stücke in gegebenem Verhältniß stehen. L. 83, Zus. 2. — 11) Zwischen zwei convergirenden Linien, welche nicht bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängert werden dürfen, eine Gerade zu ziehen, welche verlängert den Durchschnittspunkt treffen würde. Construction durch zwei in gleichem Verhältniß getheilte Parallelen zwischen den geg. Geraden. — 12) Die Halbirungslinie des von zwei convergirenden Geraden gebildeten Winkels zu construiren, ohne den Durchschnittspunkt der Geraden zu benutzen. Vergl. die vorige Aufgabe u. L. 96. — 13) Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Entfernungen von zwei der Lage nach gegebenen Geraden ein gegebenes Verhältniß zu einander haben. L. 83, Zus. 1. — 14) In einem gegebenen Dreieck einen Punkt zu bestimmen, so daß die von ihm auf die drei Seiten gefällten Perpendikel in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen. Vergl. die vorige Aufgabe. — 15) Ueber einer gegebenen Geraden ein Dreieck zu construiren, das einem gegebenen Dreieck ähnlich sei. L. 87. — 16) Ein Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich sei und eine gegebene Höhe habe. L. 87. — 17) Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und das Verhältniß der beiden Katheten gegeben ist. Vergl. die 15. Aufgabe. — 18) Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen aus der Höhe und dem Verhältniß der Grundlinie zum Schenkel. Vergl. die 16. Aufgabe. — 19) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Grundlinie und ihre Verhältnisse zu den beiden anderen Seiten gegeben sind. Vergl. die 15. Aufgabe, oder A. 27. 27. 1. — 20) Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und die Summe und das Verhältniß der beiden anderen Seiten gegeben sind. Vergl. die 1. Aufgabe dieses §. — 21) Ein Dreieck aus der Grundlinie, einem ihr anliegenden Winkel und dem Verhältniß der beiden anderen Seiten zu construiren. Vergl. A. 11 und die 15. Aufgabe dieses §. — Andere Construction mittelst L. 95, Zus. u. Anmerk. — 22) Ein Dreieck aus einem Winkel, dem Verhältniß der ihn einschließenden Seiten und der dritten Seite zu construiren. A. 10 und die 15. Aufg. dieses §, oder Aufg. 32 zu § 19. — Andere Constr. mittelst L. 95, A. 17, A. 26, A. 22. — 23) Ein Dreieck aus der Grundlinie und dem gegenüberliegenden Winkel zu construiren, wenn der Punkt der Grundlinie gegeben ist, durch welchen die Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels geht. Vergleiche die vorige Aufgabe. L. 95. — 24) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, dem Radius des umbeschriebenen Kreises und dem Verhältniß der beiden anderen Seiten. L. 95. A. 26. L. 72, Zus. 2. — 25) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn der Winkel an der Spitze, die Höhe und das Verhältniß der durch letztere gebildeten Abschnitte der Grundlinie gegeben sind. A. 15. 22. Aufgabe 16 zu diesem §. — 26) Ein Dreieck aus zwei Winkeln und der Summe der Grundlinie und Höhe zu zeichnen. Anal.: In einem ähnlichen Dreieck verhält sich die Summe der Grundlinie und Höhe zu einer Seite, wie die gegebene Summe zur homologen Seite. — 27) Ein Dreieck aus zwei Winkeln und der Differenz aus der Höhe und einer ihr anliegenden Seite zu construiren. Anal. ähnlich, wie vorher.

Weitere Aufgaben in Anhang 8, Nr. 9.

§ 32. Aehnlichkeit der Vielecke. — Die Umfänge ähnlicher Figuren.

Lehrsatz 100. Zerlegt man zwei ähnliche Polygone von homologen Winkelpunkten aus durch Diagonalen in Dreiecke, so sind je zwei gleichliegende Dreiecke einander ähnlich.

Beweis: Ist $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$, so ist 1) $\triangle ABC \backsim A'B'C'$, weil zufolge der Voraussetzung $AB : A'B' = BC : B'C'$ und $\sphericalangle ABC = A'B'C'$ ist (L. 88). Daher ist 2) $AC : A'C' = BC : B'C'$, und da $BC : B'C' = CD : C'D'$ nach Voraussetzung, so ist auch $AC : A'C' = CD : C'D'$.



Ferner ist $\sphericalangle BCA = B'C'A'$, weil $\triangle ABC \backsim A'B'C'$ ist, und da $\sphericalangle BCD = B'C'D'$ nach Voraussetzung, so ist auch $\sphericalangle BCD - BCA = B'C'D' - B'C'A'$, oder $\sphericalangle ACD = A'C'D'$, also $\triangle ACD \backsim A'C'D'$ (L. 88). In derselben Weise kann man für beliebig viele folgende Paare von Dreiecken den Beweis führen.

Zusatz 1. In zwei ähnlichen Polygonen verhalten sich je zwei homologe Diagonalen wie zwei homologe Seiten.

Zusatz 2. Der Satz 100 gestattet eine Umkehrung: Sind in zwei Polygonen, welche durch Diagonalen von je einem Eckpunkt aus in gleichviele Dreiecke zerlegt sind, die einzelnen Dreiecke der Reihe nach bezüglich einander ähnlich, und liegen die ähnlichen Dreiecke auch in entsprechender Weise an einander, so sind die Polygone ähnlich.

Beweis leicht. Mit Hülfe dieses Zusatzes findet man leicht eine Lösung der

Aufgabe 31. Ueber einer gegebenen geraden Linie als Seite ein Polygon zu construiren, welches einem gegebenen Polygon ähnlich ist.

Anmerkung: Hieran schließen sich die Sätze über ähnliche Polygone in Anhang 3.

Lehrsatz 101. Die Umfänge ähnlicher geradliniger Figuren verhalten sich wie zwei homologe Seiten derselben.

Beweis: Sind $a, b, c, \ldots$ die Seiten des einen und $a', b', c', \ldots$ bezüglich die homologen Seiten des anderen Polygons, ist also $a : b : c : \ldots = a' : b' : c' : \ldots$, so ist nach Arithm., Anhang 1, Nr. 7 auch $(a + b + c + \ldots) : (a' + b' + c' + \ldots) = a : a'$.

Lehrsatz 102. Regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnliche Figuren.

Beweis: Je zwei homologe Winkel sind gleich, da in jedem regelmäßigen n-Eck jeder Winkel $\frac{2n-4}{n}$ Rechte beträgt, und die Verhältnisse je zweier homologen Seiten sind gleich, da alle Seiten eines jeden der beiden Polygone einander gleich sind.

Sätze zu § 32.

1) Stimmen zwei geradlinige Figuren von je n Seiten überein in den Verhältnissen von $n - 1$ gleichliegenden Seiten und in den $n - 2$ eingeschlossenen Winkeln, oder in $n - 1$ gleichliegenden Winkeln und den Verhältnissen von $n - 2$ aneinanderstoßenden Seiten, so sind die Figuren ähnlich. — 2) Zwei Rechtecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse zweier aneinanderliegender Seiten, zwei Rhomben, wenn sie in einem Winkel, zwei Parallelogramme überhaupt, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnisse der ihn einschließenden Seiten übereinstimmen. — 3) In regelmäßigen Polygonen von gleicher Seitenzahl verhalten sich die großen Radien, wie die Seiten, und wie die kleinen Radien.

Aufgaben zu § 32.

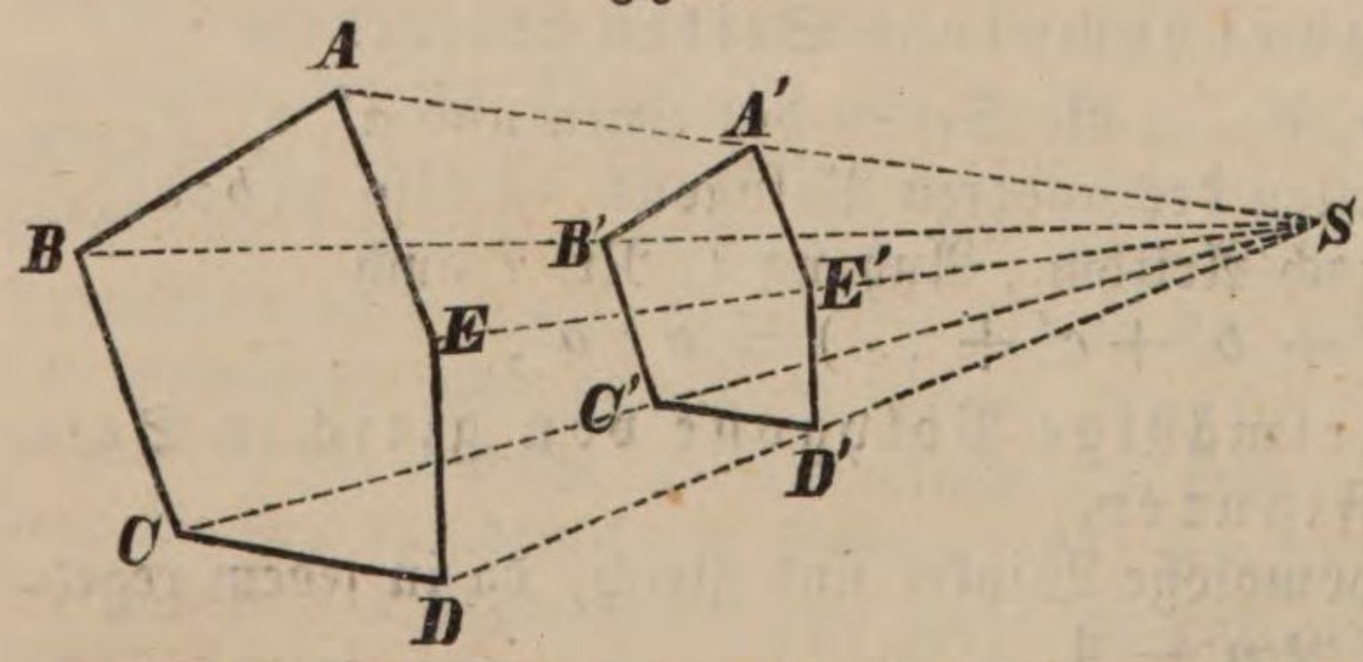
1) Ein Viereck aus einer Diagonale und den vier Winkeln, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet, zu construiren. Construction vermittelst eines ähnlichen Vierecks. — 2) Ein Viereck zu construiren aus einer Seite und den vier Winkeln, welche die Diagonalen an den dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkten mit den andern Seiten bilden. Construction wie vorher. — 3) In einen gegebenen Kreis ein Polygon zu zeichnen, welches einem in einen anderen Kreis beschriebenen Polygon ähnlich ist. — 4) Ein Polygon zu construiren, welches einem gegebenen Polygon ähnlich ist, und von welchem drei Eckpunkte auf je einer von drei der Lage nach gegebenen Geraden liegen. Constr.: Es seien M_1A_1, M_1N_1, N_1C_1 die gegebenen Geraden. Man schneide von dem gegebenen Polygon ein Dreieck ABC durch eine Diagonale ab, ziehe $AM \parallel A_1M_1$, MN durch $B \parallel M_1N_1$, $CN \parallel N_1C_1$ theile M_1N_1 in B_1, so daß $M_1B_1 : N_1B_1 = MB : NB$, ziehe $B_1A_1 \parallel BA$, $B_1C_1 \parallel BC$ u. s. w.

Anhang 3. Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsstrahlen.

1. Liegen zwei ähnliche geradlinige Figuren so gegen einander, daß zwei aneinanderstoßende Seiten der einen den homologen Seiten der anderen parallel sind, so sind auch je zwei andere homologe Seiten derselben einander parallel.

Zum Beweise verbinde man je zwei homologe Eckpunkte durch gerade Linien und zeige, daß die correspondiren den Winkel einander gleich sind.

Fig. 1.

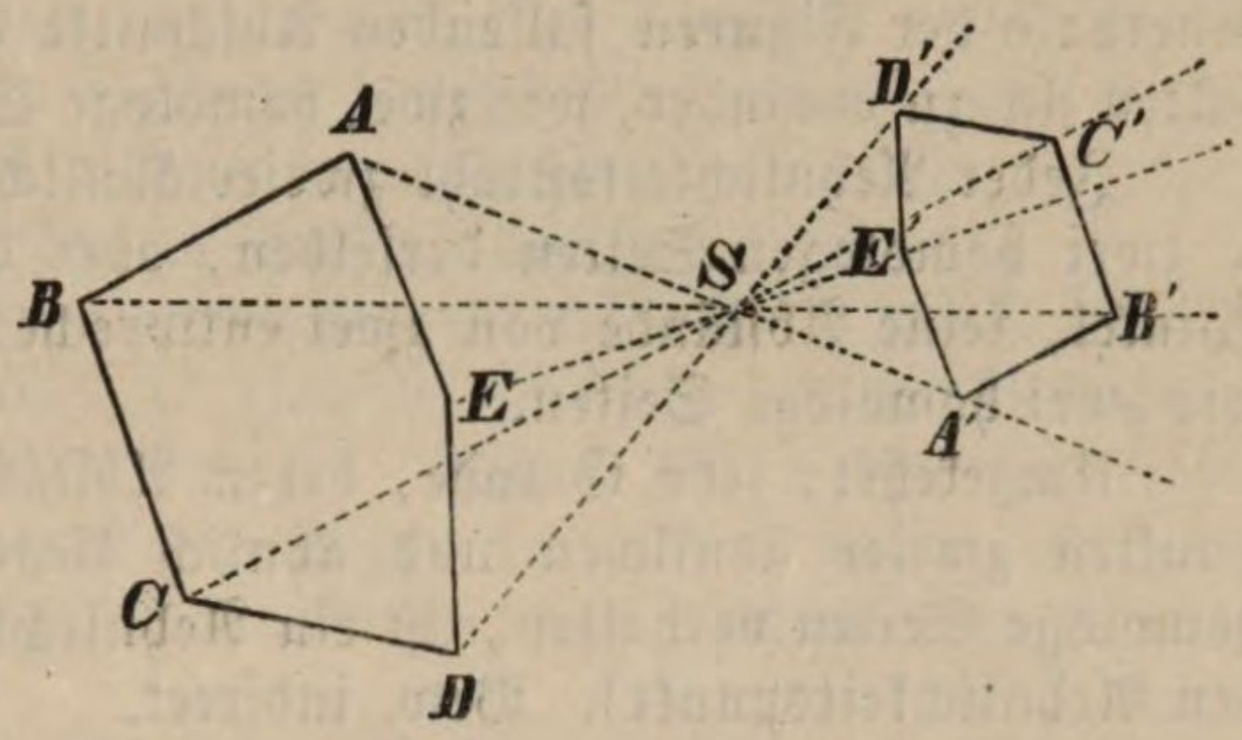


Zwei ähnliche n-Ecke lassen sich also immer in eine solche Lage zu einander bringen, daß je zwei homologe Seiten derselben einander parallel sind. In diesem Fall heißen sie ähnlich liegend.

Die homologen Seiten zweier ähnlich liegenden Figuren haben entweder sämmtlich dieselbe Richtung (Fig. 1), oder sie haben entgegengesetzte Richtungen (Fig. 2). Im ersteren Fall sagt man, die Figuren liegen direct ähnlich, im letzteren, sie liegen umgekehrt ähnlich.

2. Liegen zwei geradlinige Figuren ähnlich, so schneiden sich diejenigen geraden Linien, welche je zwei homologe Eckpunkte verbinden, in einem einzigen Punkte.

Fig. 2.



Zum Beweise zeige man, daß das Verhältniß $AS : A'S$, in welchem eine dieser Verbindungslinien durch eine andere getheilt wird, für jede der letzteren denselben Werth hat, nämlich daß dasselbe gleich dem Verhältniß $AB : A'B'$ zweier homologer Seiten ist, und daß folglich auch das Verhältniß $AS:(AS \mp A'S) = AS:AA'$, und mithin auch die Länge von AS einen constanten Werth hat.

Der Punkt S, in welchem sich die Verbindungslinien je zweier homologen Eckpunkte schneiden, heißt der Aehnlichkeitspunkt der beiden Figuren.

Liegen die Figuren direct ähnlich, so liegt der Aehnlichkeitspunkt auf den Verlängerungen der Verbindungslinien der homologen Punkte; sind dabei die Figuren congruent, so sind diese Verbindungslinien einander parallel, oder der Aehnlichkeitspunkt liegt im Unendlichen.

Liegen die Figuren umgekehrt ähnlich, so liegt der Aehnlichkeitspunkt auf diesen Linien selbst; sind dabei die Figuren congruent, so halbirt der Aehnlichkeitspunkt diese Linien.

In allen Fällen theilt der Aehnlichkeitspunkt die Verbindungslinien im Verhältniß zweier homologer Seiten.

3. Umgekehrt, nimmt man auf jeder von mehreren durch denselben Punkt S gehenden Geraden je zwei Punkte A und A', B und B', C und C' u. s. w. an, so daß $AS : A'S = BS : B'S = CS : C'S$ ist, u. s. w., und verbindet die Punkte A, B, C, ... einerseits, die Punkte A', B', C', ... andererseits durch gerade Linien in entsprechender Weise, so sind a) wenn der Punkt S auf den Verlängerungen von AA', BB', CC', ... liegt, die beiden entstandenen Figuren einander direct ähnlich, und b) wenn S auf den Strecken AA', BB', CC', ... selbst liegt, die beiden Figuren einander umgekehrt ähnlich.

Oder, zieht man von einem beliebigen Punkte S durch die Eckpunkte eines Polygons $ABCD$... gerade Linien, nimmt auf einer derselben, z. B. SA (oder auf ihrer Verlängerung über S), einen beliebigen Punkt A' an, zieht durch A' eine Parallele $A'B'$ zu AB bis zum Durchschnitt mit SB, dann durch B' die Parallele $B'C'$ zu BC bis zum Durchschnitt mit SC u. s. w., so entsteht ein dem Polygon $ABCD$... ähnliches und ähnlich liegendes Polygon $A'B'C'D'$...

4. Jede Gerade, welche durch den Aehnlichkeitspunkt zweier ähnlich liegenden Polygone geht, heißt ein Aehnlichkeitsstrahl derselben.

Jeder Aehnlichkeitsstrahl, welcher die eine von beiden Figuren schneidet, schneidet auch die andere und zwar auf homologen Seiten. Die

Abstände seiner Durchschnittspunkte mit zwei homologen Seiten von dem Aehnlichkeitspunkt verhalten sich, wie zwei homologe Seiten; beide Durchschnittspunkte theilen die homologen Seiten in demselben Verhältniß. Die innerhalb der Figuren fallenden Abschnitte eines Aehnlichkeitsstrahls verhalten sich zu einander, wie zwei homologe Seiten.

Jeder Aehnlichkeitsstrahl zweier ähnlich liegenden Figuren bildet mit je zwei homologen Seiten derselben, oder deren Verlängerungen, gleiche Winkel, seine Abstände von zwei entsprechenden Eckpunkten verhalten sich wie zwei homologe Seiten.

Umgekehrt: jede Gerade, deren Abstände von zwei homologen Eckpunkten zweier ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren sich wie zwei homologe Seiten verhalten, ist ein Aehnlichkeitsstrahl (d. h. sie geht durch den Aehnlichkeitspunkt). Bew. indirect.

5. Werden auf einem Aehnlichkeitsstrahl zweier ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ zwei Punkte P, P' angenommen, so daß sich ihre Abstände von dem Aehnlichkeitspunkt S wie zwei homologe Seiten AB, $A'B'$ verhalten — und liegen P, P', falls die beiden Figuren direct ähnlich sind, auf derselben Seite, falls sie umgekehrt ähnlich sind, auf verschiedenen Seiten von S — so verhält sich der Abstand des Punktes P von jedem Eckpunkt A des einen Polygons zu dem Abstand des Punktes P' von dem homologen Eckpunkt A' des anderen Polygons, wie zwei homologe Seiten. Die Verbindungslinien von P mit den Eckpunkten des zugehörigen Polygons $ABCD\ldots$ sind den homologen Verbindungslinien von P' mit den Eckpunkten des Polygons $A'B'C'D'\ldots$ parallel.

Die gleichen Sätze gelten, wenn statt der Eckpunkte die Durchschnittspunkte eines anderen Aehnlichkeitsstrahls mit zwei homologen Seiten genommen werden.

Zwei Punkte P, P', welche gegen zwei ähnliche Polygone eine solche Lage haben, daß ihre Abstände von den homologen Eckpunkten sich wie die homologen Seiten verhalten, heißen homologe Punkte.

6. Zu jedem Punkte P eines Polygons giebt es in jedem ähnlichen Polygon auch dann einen homologen Punkt P', wenn beide Polygone nicht ähnlich liegen.

Sind zwei Paare homologer Punkte P, P' und T, T' in zwei ähnlichen Polygonen gegeben, so verhalten sich ihre Verbindungslinien PT und $P'T'$ zu einander, wie zwei homologe Seiten. Diese Verbindungslinien heißen homologe Linien. Je zwei homologe Linien bilden mit je zwei homologen Seiten oder zwei sonstigen homologen Linien gleiche Winkel. — Liegen die Polygone ähnlich, so sind je zwei homologe Linien derselben einander parallel.

In regelmäßigen ähnlichen Polygonen sind die Mittelpunkte homologe Punkte.

7. Liegen zwei ähnliche Polygone $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ umgekehrt ähnlich, so kann man stets ein drittes Polygon $A''B''C''D''\ldots$ construiren, welches dem einen von ihnen, z. B. $A'B'C'D'$ congruent ist, gegen das andere direct ähnlich liegt und mit diesem denselben Aehnlich-

keitspunkt S hat und umgekehrt. Der Aehnlichkeitspunkt S halbirt die Aehnlichkeitsstrahlen $A'A''$, $B'B''$ u. s. w.

Die beiden congruenten Figuren $A'B'C'D'\ldots$ und $A''B''C''D''\ldots$ liegen in diesem Falle so gegeneinander, daß dieselben nur dann zur Deckung gebracht werden können, wenn man eine derselben zuvor in der Weise umkehrt, daß ihre untere Flächenseite zur oberen wird (symmetrische Lage), es sei denn, daß die beiden Flächenseiten selbst einander congruent sind, wie dies z. B. bei regelmäßigen Figuren der Fall ist.

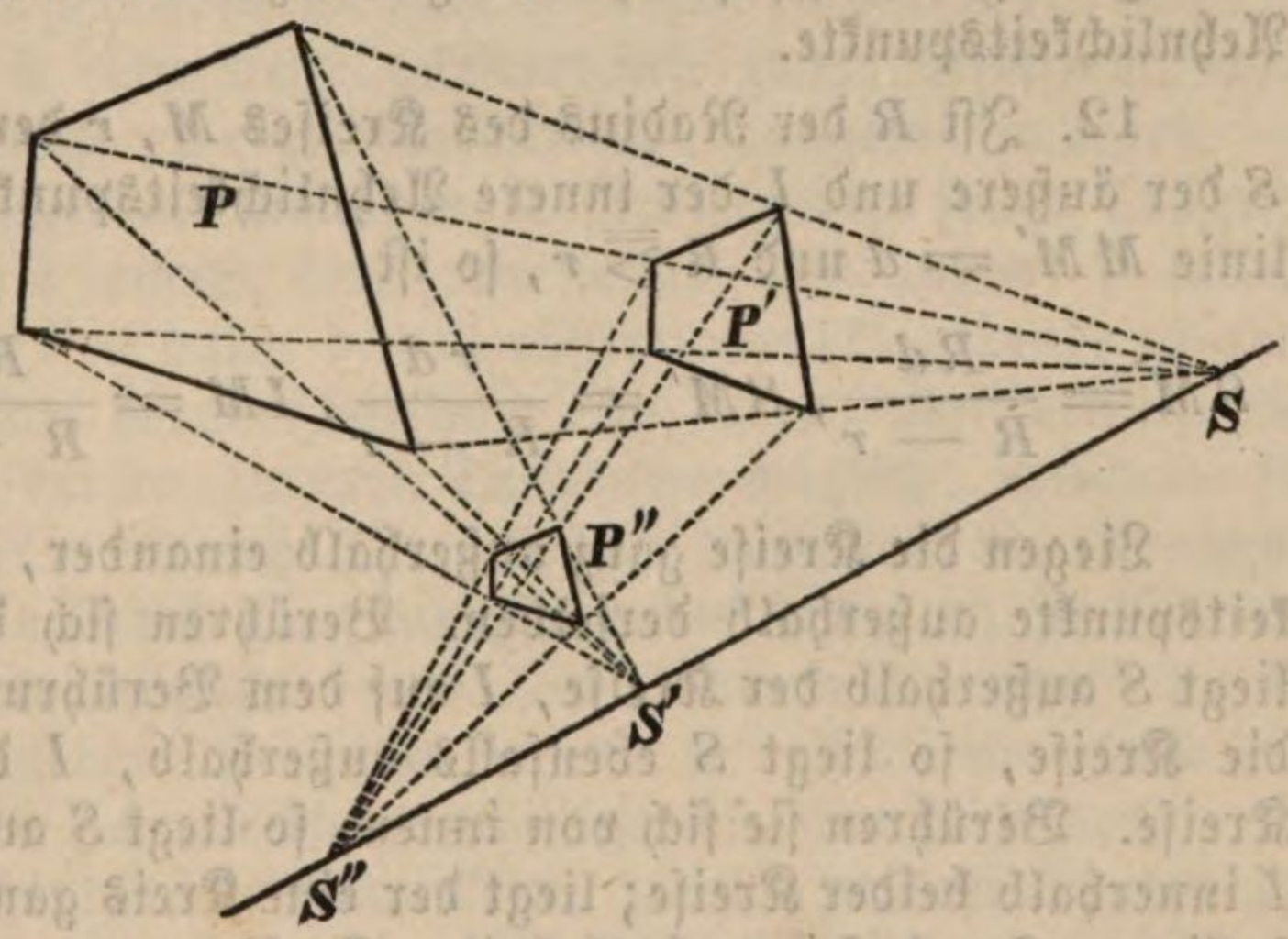
8. Zwei regelmäßige Polygone von gerader Seitenzahl, welche ähnlich und ähnlich liegend sind, können zu gleicher Zeit als direct ähnlich und als umgekehrt ähnlich betrachtet werden. Daher haben dieselben zwei Aehnlichkeitspunkte. Man nennt denjenigen derselben, welcher zwischen den homologen Eckpunkten liegt, den inneren, den anderen den äußeren Aehnlichkeitspunkt.

9. Anwendung des Aehnlichkeitspunktes zur Lösung der Aufgabe: Ueber einer gegebenen Geraden ein Polygon zu construiren, welches einem gegebenen ähnlich ist.

---

10. Liegen drei ähnliche Vielecke P, P', P'' gegen einander direct ähnlich, so liegen die drei Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie.

Beweis: Sind S, S', S'' bezüglich die Aehnlichkeitspunkte für PP', PP'', $P'P''$, so ist die Linie SS' ein Aehnlichkeitsstrahl für P, P' und P, P'', daher auch für PP'' (Nr. 4. Umkehrung), und es geht also SS' durch S''.



Liegen von drei ähnlichen Vielecken zwei (P, P') gegen einander direct ähnlich, dagegen beide mit dem dritten (P'') umgekehrt ähnlich, so liegen die drei Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie. Beweis ähnlich wie vorher.

Drei ähnlich liegende regelmäßige Vielecke von gerader Seitenzahl haben drei innere und drei äußere Aehnlichkeitspunkte, und es liegen die drei äußeren, sowie auch je zwei innere mit einem äußeren in gerader Linie. Wieviel gerade Linien erhält man auf diese Weise?

---

11. Zieht man in zwei Kreisen M, M' Radien MA, $M'A'$ parallel und in gleicher Richtung und verbindet die Endpunkte A, A' je zweier parallelen Radien mit einander, so schneiden sich alle Verbindungslinien, welche man auf diese Art construiren kann, wenn die Kreise ungleich sind, in einem einzigen Punkt; dieser Punkt liegt auf der Verlängerung der

Centrallinie über den Mittelpunkt des kleineren Kreises und seine Abstände von den Mittelpunkten verhalten sich wie die Radien.

Beweis: Bestimme das Verhältniß, in welchem die Centrallinie von jeder der Verbindungslinien geschnitten wird.

Man nennt diesen Durchschnittspunkt den äußeren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise. — Sind die letzteren gleich groß, so sind jene Verbindungslinien einander parallel und man kann sagen, der Aehnlichkeitspunkt liege in unendlicher Entfernung.

Zieht man ferner beliebig viele Paare von Radien parallel und entgegengesetzt gerichtet, so schneiden sich die Verbindungslinien der Endpunkte je zweier parallelen Radien ebenfalls in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt, welcher der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise genannt wird, liegt auf der Centrallinie und theilt dieselbe im Verhältniß der Radien. Bei gleich großen Kreisen halbirt er also die Centrallinie, bei ungleichen Kreisen liegt er dem Mittelpunkt des kleineren Kreises näher als dem des größeren.

Beweis ähnlich wie vorher.

Bei zwei concentrischen Kreisen fallen beide Aehnlichkeitspunkte in den gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Jede gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise geht durch einen ihrer Aehnlichkeitspunkte.

12. Ist R der Radius des Kreises M, r der Radius des Kreises M', S der äußere und I der innere Aehnlichkeitspunkt, ist ferner die Centrallinie $MM' = d$ und $R \gtrless r$, so ist

$$SM = \frac{Rd}{R - r}, \; SM' = \frac{rd}{R - r}, \; IM = \frac{Rd}{R + r}, \; IM' = \frac{rd}{R + r}.$$

Liegen die Kreise ganz außerhalb einander, so liegen beide Aehnlichkeitspunkte außerhalb derselben. Berühren sich die Kreise von außen, so liegt S außerhalb der Kreise, I auf dem Berührungspunkt. Schneiden sich die Kreise, so liegt S ebenfalls außerhalb, I dagegen innerhalb beider Kreise. Berühren sie sich von innen, so liegt S auf dem Berührungspunkt, I innerhalb beider Kreise; liegt der eine Kreis ganz innerhalb des anderen, so liegen S und I innerhalb beider Kreise.

13. Eine Gerade, welche durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise geht und den einen derselben berührt, berührt auch den anderen. Bew. L. 83, Zus. 2; Nr. 11. L. 66.

Eine Gerade, welche durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise geht, und den einen Kreis schneidet, schneidet auch den anderen. Die nach den Durchschnittspunkten gehenden Radien sind paarweise einander parallel, und zwar, wenn die Secante durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt geht, gleichgerichtet, wenn sie durch den inneren Aehnlichkeitspunkt geht, entgegengesetzt gerichtet. — Die beiden auf einer solchen Secante liegenden Sehnen verhalten sich wie die zugehörigen Radien.

Jede durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise gehende Gerade heißt ein Aehnlichkeitsstrahl derselben und zwar ein äußerer oder ein

innerer, je nachdem sie durch den äußeren oder durch den inneren Aehnlichkeitspunkt geht.

14. Zieht man von den Mittelpunkten zweier Kreise aus nach einem beliebigen Aehnlichkeitsstrahl derselben zwei Parallelen, so verhalten sich diese zu einander wie die Radien.

Umgekehrt, haben zwei von den Mittelpunkten zweier Kreise ausgehende Parallelen das Verhältniß der zugehörigen Radien, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch einen Aehnlichkeitspunkt. — Unter welcher Bedingung ist dieser Aehnlichkeitsstrahl ein äußerer, unter welcher ein innerer?

Welche besonderen Sätze sind im Vorstehenden für Sehnen zweier sich berührenden Kreise enthalten, die durch den Berührungspunkt gehen?

15. Gehen durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise zwei beliebige Secanten, so haben von den vier zwischen ihnen liegenden Bogen je zwei gleiche Centriwinkel. Für den äußeren Aehnlichkeitspunkt sind dies stets zwei in demselben Sinne, für den inneren zwei im entgegengesetzten Sinne gekrümmte Bogen. — Die Sehnen dieser (ähnlichen) Bogen sind einander parallel.

Man bilde und beweise die Umkehrungen dieser Sätze.

Welche besonderen Sätze sind im Vorigen für die durch einen Berührungspunkt zweier Kreise gehenden Sehnen derselben enthalten?

16. Aufgaben: 1. Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise zu construiren. 2. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu legen. — Liegen die Kreise ganz außerhalb einander, so giebt es vier solche Tangenten, zwei äußere und zwei innere; berühren sie sich von außen, so fallen die beiden inneren in die eine durch den Berührungspunkt gehende zusammen, und es giebt also drei gemeinschaftliche Tangenten; schneiden sich die Kreise, so sind nur die beiden äußeren Tangenten möglich; berühren sie sich von innen, so ist nur eine vorhanden, welche durch den Berührungspunkt geht; liegt der eine Kreis ganz innerhalb des anderen, so ist keine gemeinschaftliche Tangente möglich. — 3. Durch einen gegebenen Punkt eine Secante in zwei gegebene Kreise zu legen, so daß die innerhalb der letzteren fallenden Sehnen sich wie die zugehörigen Radien verhalten.

17. Von den sechs Aehnlichkeitspunkten, welche zu drei Kreisen gehören, liegen sowohl die drei äußeren, als auch je zwei innere mit dem nicht zugehörigen äußeren in gerader Linie. (Vergl. 10.) (Lehrsatz von Monge.)

Welche besonderen Sätze erhält man hieraus, wenn zwei der Kreise einander, oder den dritten, oder wenn alle drei sich gegenseitig berühren?

Die vier Geraden, auf welchen die sechs Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen, heißen Aehnlichkeitsaxen (oder Symmetralen) der drei Kreise. Diejenige, auf welcher die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte liegen, heißt die äußere, die übrigen heißen innere Aehnlichkeitsaxen.

18. Potenzhaltende Punkte zweier Kreise für einen ihrer Aehnlichkeitspunkte nennt man zwei solche Durchschnittspunkte eines Aehnlichkeitsstrahls mit ihren Peripherien, deren Radien nicht parallel sind, und von denen der eine auf dem einen, der andere auf dem anderen Kreise liegt.

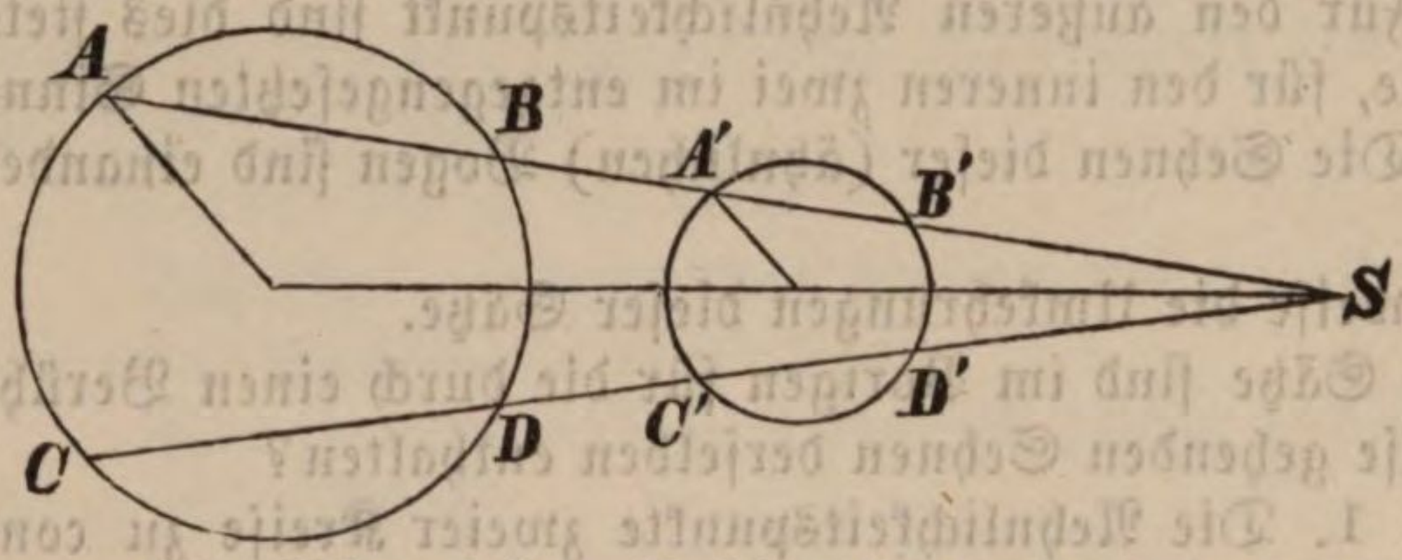
Auf jedem Aehnlichkeitsstrahl, welcher die Kreise schneidet, liegen zwei Paare potenzhaltender Punkte. — Schneiden sich zwei Kreise, so fallen in jedem Durchschnittspunkt zwei potenzhaltende Punkte für jeden Aehnlichkeitspunkt zusammen.

Das Product aus den Entfernungen zweier potenzhaltender Punkte, die zu demselben Aehnlichkeitspunkt gehören, von diesem Aehnlichkeitspunkt hat für alle solche Paare potenzhaltender Punkte denselben Werth.

Beweis: Sind AA' und BB' homologe Punkte eines Aehnlichkeitsstrahles SA, CC' und DD' homologe Punkte eines zweiten Aehnlichkeitsstrahles SC, so ist 1) $SB' : SB = SA' : SA$, also auch $SB' \,.\, SA = SA' \,.\, SB$.

2) $SB' \,.\, SA' = SD' \,.\, SC'$, und $SC' : SC = SB' : SB$, also $SC' = \frac{SB' \,.\, SC}{SB}$,

daher auch $SB' \,.\, SA' = \frac{SD' \,.\, SB' \,.\, SC}{SB}$, oder $SB \,.\, SA' = SD' \,.\, SC$, u. s. w.



Der constante Werth der eben genannten Producte wird die gemeinschaftliche Potenz der beiden Kreise für den betreffenden Aehnlichkeitspunkt genannt.

19. Nimmt der Radius des einen von zwei Kreisen stetig ab und wird derselbe zuletzt gleich Null, so reducirt sich der Kreis auf seinen Mittelpunkt, nimmt dagegen der Radius stetig zu, so nähert die Kreislinie sich bei unendlichem Wachsen des Radius einer Geraden als Grenze. Man kann daher die bisherigen Untersuchungen auch auf einen Kreis und einen Punkt, oder eine Gerade ausdehnen.

Für einen Kreis und einen Punkt ist dieser Punkt sowohl äußerer als innerer Aehnlichkeitspunkt. Das Gleiche gilt für einen Punkt und eine Gerade. Für einen Kreis und eine Gerade sind die Aehnlichkeitspunkte die Endpunkte eines zu letzterer senkrechten Durchmessers des ersteren.

VI. Capitel.

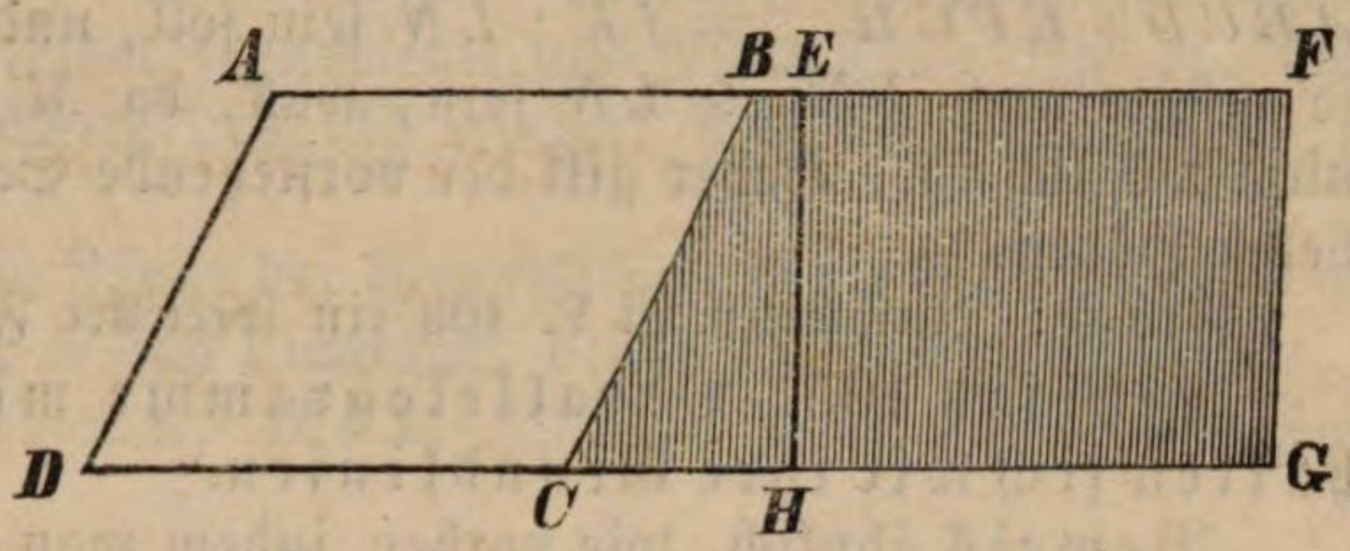
Vom Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

§ 33. Flächeninhalt von Parallelogrammen.

Lehrsatz 103. Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen haben gleichen Flächeninhalt.

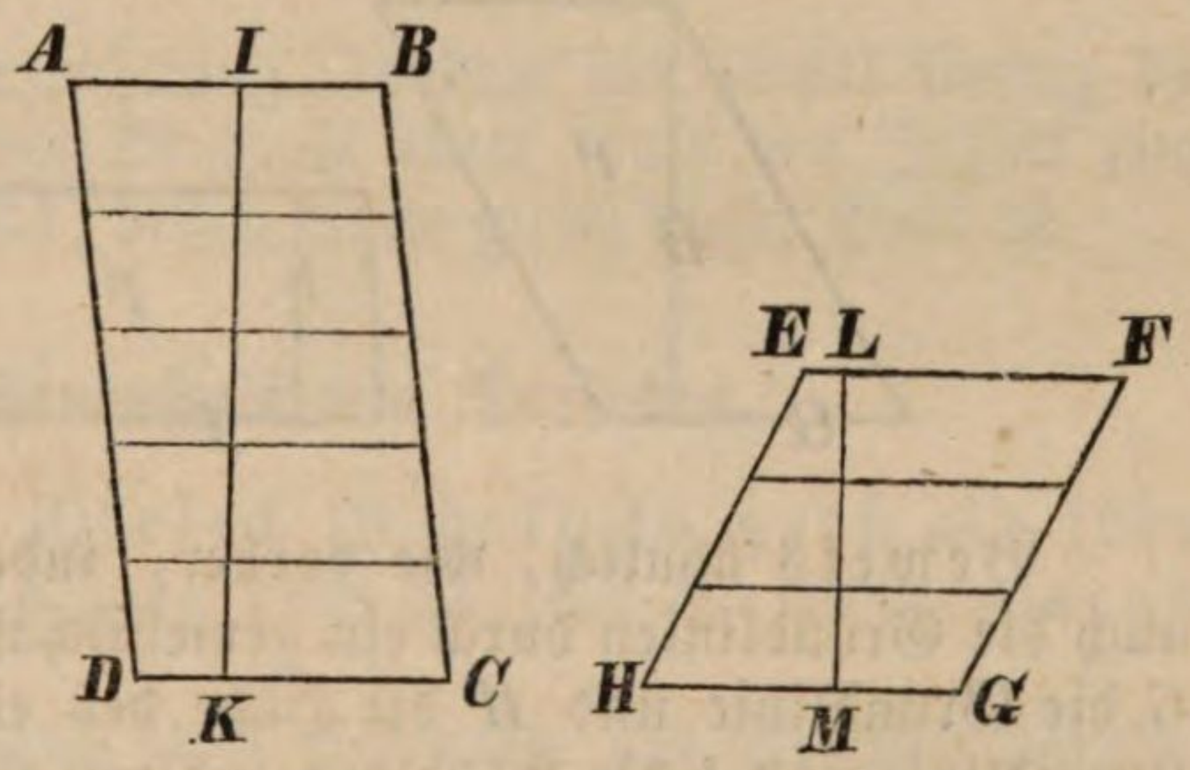
Beweis: Sind $ABCD$ und $EFGH$ zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien DC, HG und gleichen Höhen, so denke man sich das eine derselben mit seiner Grundlinie HG so auf die Verlängerung der Grundlinie DC des anderen gestellt, daß beide Parallelogramme auf der-

selben Seite der Linie DG liegen und ihre Umfänge keinen Punkt gemeinsam haben. Da die Höhen gleich sind, so müssen in diesem Falle die Seiten AB und EF in einer zu DG parallelen Geraden liegen; zieht man also BE, so sind $AEHD$ und $BFGC$ zwei Trapeze. Man kann leicht beweisen, daß diese in je zwei gleichliegenden Seiten und in je zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, mithin congruent und also auch gleich groß sind. Zieht man nun von jedem dieser Trapeze das ihnen gemeinschaftliche Trapez $BCHE$ ab, so müssen die Reste, d. h. die Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$, ebenfalls inhaltsgleich sein.

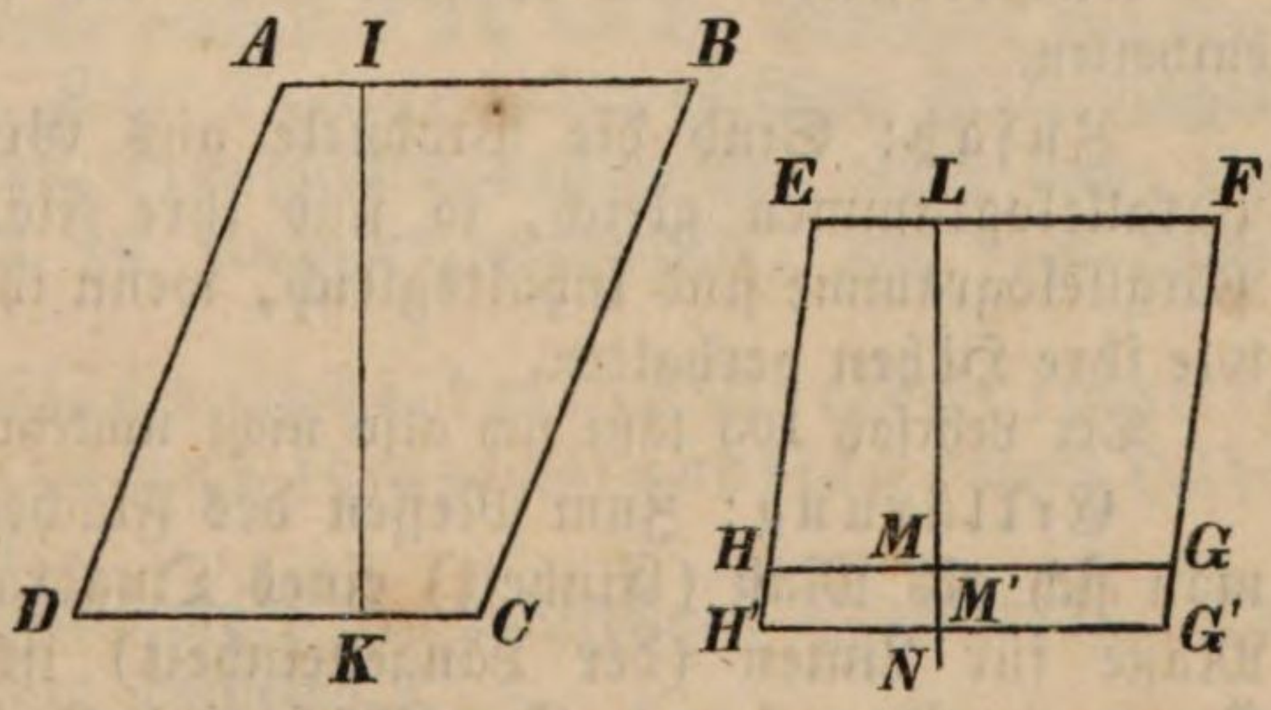


Lehrsatz 104. Parallelogramme mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis: Es seien $ABCD$ und $EFGH$ die beiden Parallelogramme; theilt man ihre Höhen IK und LM durch ein gemeinschaftliches Maß in gleiche Theile und ist m die Anzahl der Theile von IK, n die der Theile von LM, so verhält sich $IK : LM = m : n$. Man ziehe nun durch jeden Theilpunkt eine Parallele zu der zugehörigen Grundlinie, zeige, daß hierdurch das Parallelogramm $ABCD$ in m und $EFGH$ in n kleinere Parallelogramme getheilt wird, und daß diese Parallelogramme zufolge L. 43, Zus. 1. L. 103 sämmtlich gleich groß sind. Daher kann jedes derselben als Maß der beiden gegebenen Parallelogramme dienen und diese verhalten sich mithin ebenfalls wie $m : n$, also wie ihre Höhen.



Sind aber die Höhen IK und LM incommensurabel, so würde, falls unser Satz in diesem Falle ungültig wäre, doch jedenfalls auf LM, sei es zwischen L und M oder auf ihrer Verlängerung, ein Punkt N existiren, so daß $ABCD : EFGH = IK : LN$ wäre. Man kann dann jedenfalls ein Maß von IK finden, welches kleiner als MN wäre, und trägt man dieses Maß auf LN von L aus ab, so muß ein Theilpunkt zwischen M und N, etwa nach M' fallen. Zieht man nun durch



M' die Parallele $H'G'$ zu HG und construirt das Parallelogramm $EFG'H'$, so wäre — da LM' und IK commensurabel sind —
$ABCD : EFG'H' = IK : LM'$, und da nach der Annahme
$ABCD : EFGH = IK : LN$ sein soll, und $EFG'H' \gtrless EFGH$ ist, so müßte auch $LM' \gtrless LN$ sein, was, da M' zwischen M und N liegt, nicht möglich ist. Daher gilt der vorstehende Satz auch bei incommensurabelen Höhen.

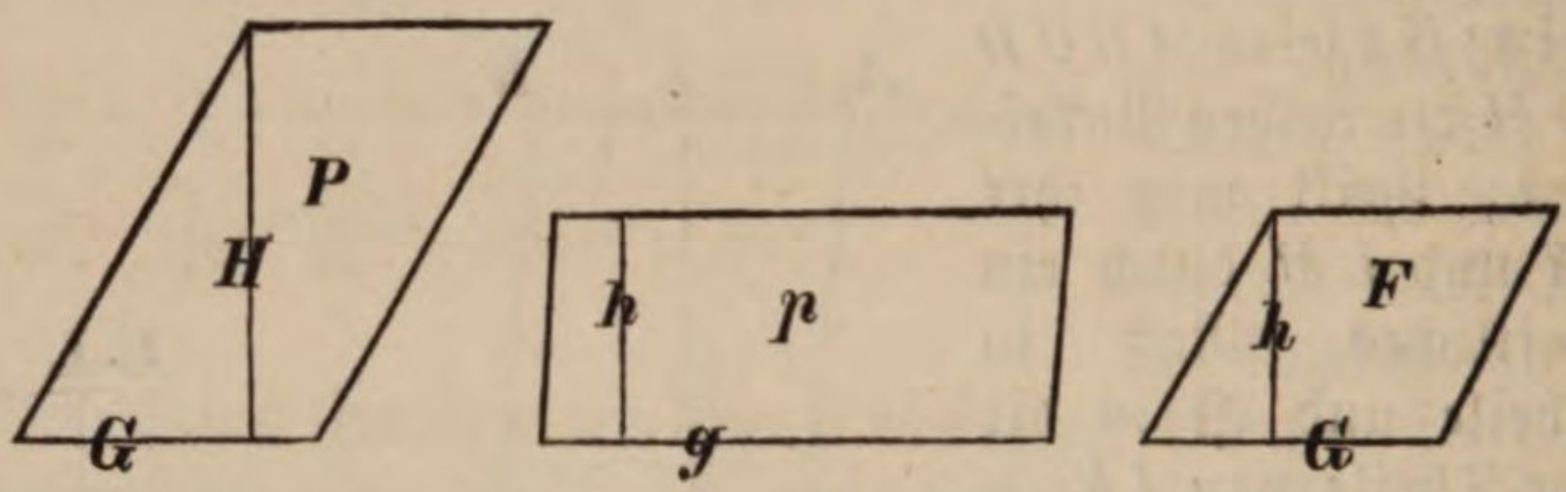
Frage: Inwiefern ist L. 103 ein specieller Fall des vorstehenden?

Lehrsatz 105. Parallelogramme mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis ähnlich, wie vorher, indem man die Grundlinien theilt und durch die Theilpunkte zu den anliegenden Seiten Parallelen zieht.

Frage, wie vorher.

Lehrsatz 106. Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.



Beweis ähnlich, wie vorher, indem man sowohl die Höhen, als auch die Grundlinien durch ein gemeinschaftliches Maß theilt. — Oder, ist G die Grundlinie und H die Höhe des einen Parallelogramms P, g die Grundlinie und h die Höhe des anderen Parallelogramms p, so construire man ein drittes F, dessen Grundlinie gleich G und dessen Höhe gleich h ist, dann ist

$P : F = H : h$ (L. 104)
$F : p = G : g$ (L. 105), also (Arithm. Anhang 1, n. 8)
$P : p = H \cdot G : h \cdot g$.

Anmerkung: Die Lehrsätze 103—105 sind in 106 als specielle Fälle enthalten.

Zusatz: Sind die Producte aus Grundlinie und Höhe in zwei Parallelogrammen gleich, so sind ihre Flächeninhalte gleich; oder zwei Parallelogramme sind inhaltsgleich, wenn ihre Grundlinien sich umgekehrt wie ihre Höhen verhalten.

Der Lehrsatz 103 läßt sich also nicht umkehren.

Erklärung: Zum Messen des Flächeninhaltes einer Figur bedient man sich als Maß (Einheit) eines Quadrates, dessen Seite gleich dem Maße für Linien (der Längeneinheit) ist (Quadratzoll, Quadratfuß, Quadratmeile u. s. w.). Der Flächeninhalt einer Figur wird also durch die Angabe ausgedrückt, wie oft dieses Quadrat in der Fläche der Figur enthalten sei, oder durch das Verhältniß der Fläche der Figur zur Fläche des Quadrats.

Lehrsatz 107. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Product aus seiner Grundlinie und seiner Höhe, d. h. das Parallelogramm enthält soviele mal die Flächeneinheit, als das Product der Maßzahlen seiner Grundlinie und seiner Höhe angiebt, wenn diese beiden durch die Seite des als Einheit dienenden Quadrates gemessen sind.

Beweis: Ist G die Länge der Grundlinie, H die der Höhe des Parallelogramms P, und ist M das Quadrat, dessen Seiten gleich 1 sind, so ist nach L. 106: $P : M = G \cdot H : 1 \cdot 1$, oder M ist in P $G \cdot H$mal enthalten.

Zusatz: Der Inhalt eines Rechteckes ist gleich dem Product zweier aneinanderstoßenden Seiten, der eines Quadrates gleich der zweiten Potenz einer Seite.

Daher können die Ausdrücke „Product zweier Linien" und „Rechteck zweier Linien" als gleichbedeutend angesehen werden, denn jedes Product $a \cdot b$ zweier Linien giebt den Inhalt eines Rechteckes an, dessen Seiten gleich a und b sind.

Ferner erklärt sich die Bezeichnung Quadrat für zweite Potenz daraus, daß die zweite Potenz der Maßzahl einer Linie den Inhalt eines geometrischen Quadrates angiebt, dessen Seite gleich dieser Linie ist.

§ 34. Flächeninhalt von Dreiecken.

Lehrsatz 108. Jedes Dreieck ist halb so groß als jedes Parallelogramm, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Beweis: Man ziehe durch zwei Eckpunkte des Dreiecks parallele Linien zu den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht ein dem gegebenen gleiches Parallelogramm (L. 103), welches doppelt so groß als das Dreieck ist (L. 43).

Zusätze: 1. Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind gleich. 2. Dreiecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. 3. Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien. 4. Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen. 5. Zwei Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt, wenn die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen gleich sind, oder wenn sich ihre Grundlinien zu einander umgekehrt, wie ihre Höhen verhalten.

Lehrsatz 109. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Productes aus seiner Grundfläche und Höhe.

Beweis: L. 108. 107.

Zusatz: Der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich der Hälfte des Productes seiner Katheten.

Aufgaben zu § 33 und 34.

Den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks zu berechnen: 1) wenn die beiden Katheten a, b gegeben sind: $a = 12$, $b = 17$; $a = 0{,}48$, $b = 2{,}3$;

$a = 5\frac{3}{4}$, $b = 7\frac{1}{8}$. — 2) aus der Hypotenuse c und einer Kathete a. $c = 697$, $a = 528$; $c = 0{,}0773$, $a = 0{,}0195$; $c = 21\frac{4}{9}$, $a = 18\frac{2}{3}$. — 3) aus einer Kathete a und der Höhe h (L. 92). $a = 181$, $h = 19$; $a = 2{,}05$, $h = 1{,}87$; $a = 44\frac{1}{3}$, $h = 28$. — 4) aus einer Kathete a und dem ihr anliegenden Abschnitt p der Hypotenuse. $a = 3{,}13$, $p = 0{,}25$; $a = 41$, $p = 16\frac{4}{5}$. — 5) aus den beiden Abschnitten p und q der Hypotenuse. $p = 26$, $q = 104$; $p = 0{,}18$, $q = 0{,}5$. — 6) aus einem Abschnitt p der Hypotenuse und der Höhe h. $p = 5463$, $h = 8276$.

7) Aus dem Flächeninhalt F eines rechtwinkeligen Dreiecks und der Hypotenuse c die Katheten zu berechnen. (Quadratische Gleichung.) $F = 92{,}4$, $c = 21$.

---

8) Den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite a zu berechnen. L. 34, Zus. 2. L. 93.

9) Aus dem Flächeninhalt F eines gleichseitigen Dreiecks die Seite a zu berechnen.

10) Aus der Summe der Seite und Höhe eines gleichseitigen Dreiecks den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

Den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks zu berechnen 11) aus der Grundlinie a und dem Schenkel b. $a = 616$, $b = 317$; $a = 16$, $b = 64\frac{1}{4}$. — 12) aus dem Schenkel b und der Höhe h auf der Grundlinie. $b = 61$, $h\ 41\frac{2}{5}$; $b = 2{,}29$, $h = 0{,}6$. — 13) aus der Grundlinie a und der Höhe h_b auf einem Schenkel. $a = 8{,}5$, $h_b = 3{,}6$; $a = 11\frac{4}{11}$, $h_b = 4$. — 14) aus den Höhen h und h_b. $h = 482$, $h_b = 209$; $h = 11\frac{12}{23}$, $h_b = 1$. — 15) aus der Höhe h und dem Umfang u. $h = 11$, $u = 45$; $h = 3\frac{1}{3}$, $u = 12\frac{5}{6}$.

16) Aus dem Flächeninhalt und der Grundlinie eines Dreiecks die Höhe zu berechnen.

17) Den Inhalt eines Quadrates aus der Diagonale zu berechnen und umgekehrt.

Ein Quadrat mit der Seite a ist gegeben; man berechne 18) die Höhe eines demselben gleichen Dreiecks, dessen Grundlinie b gegeben ist, 19) die Höhe eines demselben gleichen Dreiecks, in welchem die Grundlinie gleich der Höhe ist; 20) die Seite eines Quadrates, welches n mal so groß ist, als das gegebene. $a = 0{,}23$, $n = 3$; $a = 17\frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$; $a = 0{,}45$, $n = \frac{1}{16}$.

Den Inhalt eines Quadrates zu berechnen 21) aus der Summe s der Diagonale und Seite. $s = 0{,}24$; $s = 3\frac{1}{8}$. — 22) aus der Differenz d der Diagonale und Seite. $d = 563{,}4$; $d = 12\frac{3}{17}$.

23) Zu jeder Seite eines Rechteckes, dessen Seiten a und b gegeben sind, ist eine Parallele gezogen. Man soll den Inhalt des von diesen Parallelen gebildeten Rechtecks berechnen, wenn die vier Abstände c, d, e, f der Parallelen von den zugehörigen Seiten gegeben sind und a) alle Parallelen außerhalb, b) alle innerhalb, c) die Parallelen des einen Paares Gegenseiten außerhalb, die anderen innerhalb gezogen sind. Welche Resultate erhält man in diesen Fällen für $c = d = e = f$?

24) In einen Kreis mit dem Radius r ist ein Rechteck beschrieben, dessen eine Seite gleich a ist. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

25) Wie viel quadratische Steine, deren Seite gleich $\frac{2}{3}$ Quadratfuß ist, gebraucht man zum Belegen einer rechtwinkeligen Hausflur von $14\frac{1}{2}$ Fuß Länge und $8\frac{2}{3}$ Fuß Breite?

26) Von einem Rhombus sind die Diagonalen e, f gegeben; man soll seinen Flächeninhalt berechnen.

Vergl. Anhang 8, n. 2.

§ 35. Flächeninhalt von Vierecken und Polygonen.

Aufgabe 32. Den Flächeninhalt einer beliebigen geradlinigen Figur zu bestimmen.

Auflösung: Man theile die Figur auf irgend eine Weise, z. B. durch Diagonalen, oder durch Linien, welche von einem beliebigen im Innern der Figur angenommenen Punkte nach den Eckpunkten gehen, in Dreiecke, berechne die Flächeninhalte der letzteren nach L. 109 und addire dieselben.

Die Anwendung dieser Auflösung auf Trapeze und regelmäßige Polygone insbesondere führt auf folgende Lehrsätze:

Lehrsatz 110. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Product aus seiner Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten.

Beweis mittelst einer Diagonale.

Zusatz: Ein Trapez ist also so groß wie ein Dreieck von gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Summe der parallelen Seiten ist, und so groß wie ein Parallelogramm von gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Mittellinie des Trapezes ist.

Wie kann man diese beiden Sätze unmittelbar durch Construction der betreffenden Figuren beweisen?

Lehrsatz 111. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons ist gleich der Hälfte des Productes aus seinem Umfang und seinem kleinen Radius.

Beweis: Man zerlege das Polygon mittelst der großen Radien in Dreiecke.

Zusatz: Ein regelmäßiges Polygon ist also einem Dreiecke inhaltsgleich, dessen Grundlinie gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem kleinen Radius des Polygons ist.

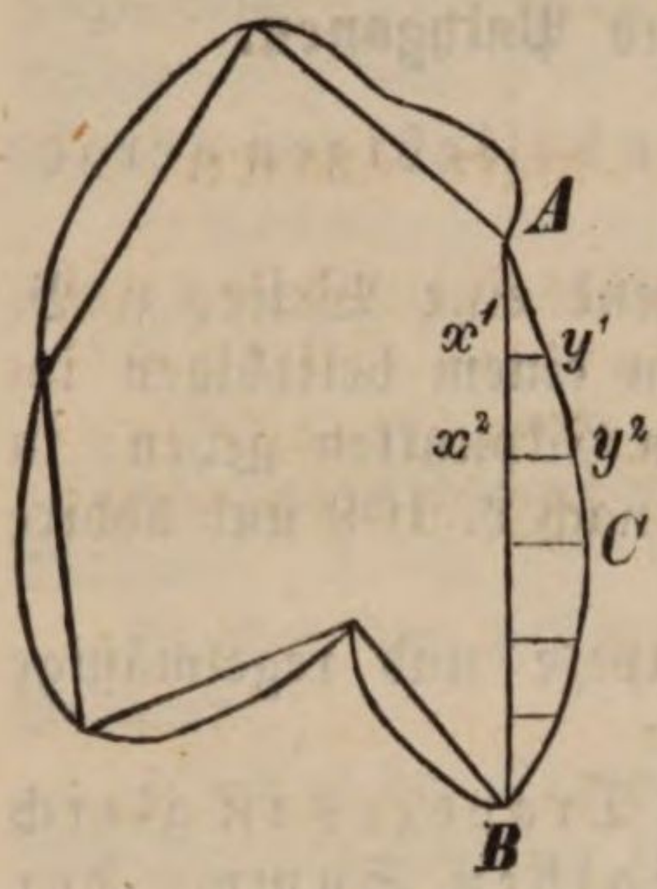
Anmerkung: Zur Berechnung des Flächeninhaltes eines beliebigen Polygons kann man neben der Zerlegung in Dreiecke auch die in Figuren anderer Art anwenden, für welche im Bisherigen die Regeln entwickelt sind, also z. B. in Parallelogramme und Trapeze. Ferner kann man die zu berechnende Figur statt als Summe auch als Differenz oder algebraische Summe einfacher Figuren darstellen. Besonders brauchbare Verfahren sind unter anderen die folgenden:

a) Man ziehe zu einer beliebigen Geraden, etwa einer Seite der Figur, durch die einzelnen Eckpunkte derselben parallele Linien, bis sie den Umfang zum zweiten Male schneiden. Hierdurch wird die Figur in Dreiecke und Trapeze zerlegt, deren Höhen sich sämmtlich auf einer und derselben Geraden abmessen lassen.

b) Man fälle auf eine beliebige Gerade von jedem Eckpunkt der Figur eine Senkrechte, so erhält man eine Anzahl von Trapezen, beziehungsweise Dreiecken,

deren Höhen sämmtlich auf jener Geraden gemessen werden können, und als deren (absolute oder algebraische) Summe die Figur leicht berechnet werden kann.

Aehnliche Methoden ermöglichen eine näherungsweise Bestimmung des Flächeninhaltes krummliniger Figuren:



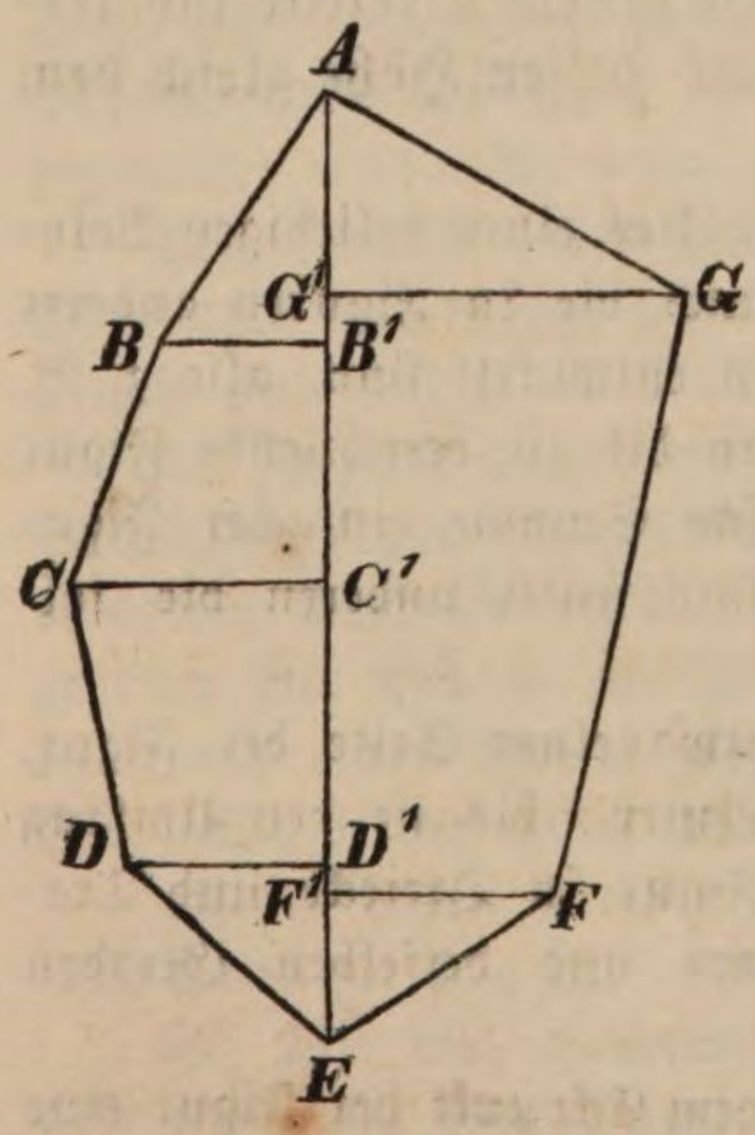
a) Man beschreibe innerhalb der gegebenen Figur ein Polygon, dessen Seiten sich dem Umfange des ersteren, soviel als zweckmäßig erscheint, anschließen, und berechne den Inhalt des Polygons und die Flächen der noch außerhalb desselben fallenden krummlinigen Figuren einzeln. Bei jeder der letzteren, z. B. ACB, ziehe man zu der zugehörigen Polygonseite AB eine Anzahl senkrechter Linien x^1y^1, x^2y^2, u. s. w., bis zu den krummen Linien, welche so nahe aneinanderliegen, daß man die zwischen ihnen liegenden Bogen Ay^1, y^1y^2, u. s. w. ohne einen für die erforderliche Genauigkeit der Rechnung erheblichen Fehler zu begehen, als geradlinig, und somit Ax^1y^1 als ein Dreieck, $x^1y^1y^2x^2$ als ein Trapez u. s. w. ansehen kann. — Nimmt man hierbei die Abstände Ax^1, x^1x^2, ... der Senkrechten von einander gleich groß an, und bezeichnet ihre Länge durch h, die der Senkrechten der Reihe nach durch a, b, c, ... m, n, so ist der Inhalt von ACB näherungsweise gleich

$$\tfrac{1}{2}ah + \frac{a+b}{2}\cdot h + \frac{b+c}{2}\cdot h + \ldots + \frac{m+n}{2}\cdot h + \frac{n}{2}\cdot h$$

$$= \frac{h}{2}(2a + 2b + 2c + \ldots + 2n) = h\,.\,(a + b + c + \ldots + n).$$

b) Man kann das Polygon weglassen und die ganze gegebene Figur durch parallele Linien von geringem Abstand in kleinere Figuren theilen, welche ohne Ueberschreitung der vorgeschriebenen Fehlergrenze als Trapeze oder Dreiecke betrachtet werden können.

Vergleiche Anhang 12, A, 6.



Aufgaben zu § 35:

1) Den Inhalt eines Trapezes aus den parallelen Seiten a, b und der Höhe h zu berechnen für $a = 17{,}32$, $b = 27{,}65$, $h = 3{,}42$; $a = 15\frac{2}{7}$, $b = 32\frac{3}{11}$, $h = 6\frac{5}{12}$.

2) Aus dem Inhalt F eines Trapezes, einer parallelen Seite a und der Höhe h die andere parallele Seite zu berechnen.

3) Aus dem Inhalt und den parallelen Seiten eines Trapezes die Höhe zu berechnen.

4) In einem Parallelogramm soll zwischen zwei Gegenseiten eine Gerade gezogen werden, so daß dadurch ein Trapez abgeschnitten wird, welches gleich dem $n$ten Theile des Parallelogramms ist. Gegeben sind die Abschnitte a, b der einen Seite, man soll die der andern berechnen.

5) Den Flächeninhalt eines Polygons $ABCDEFG$ zu berechnen, wenn die von den Eckpunkten auf die Diagonale AE gefällten Perpendikel BB_1, CC_1 u. s. w. und die Abschnitte der Diagonale AE gegeben sind, für $AG_1 = 3{,}8$, $G_1G = 8{,}2$, $G_1B_1 = 1{,}3$, $B_1B = 3{,}5$, $B_1C_1 = 5{,}6$, $C_1C = 5{,}6$, $C_1D_1 = 6{,}0$, $D_1D = 4{,}0$, $D_1F_1 = 0{,}9$, $F_1F = 5{,}4$, $F_1E = 3{,}1$.

§ 36. Weitere Sätze über die Flächen geradliniger Figuren.

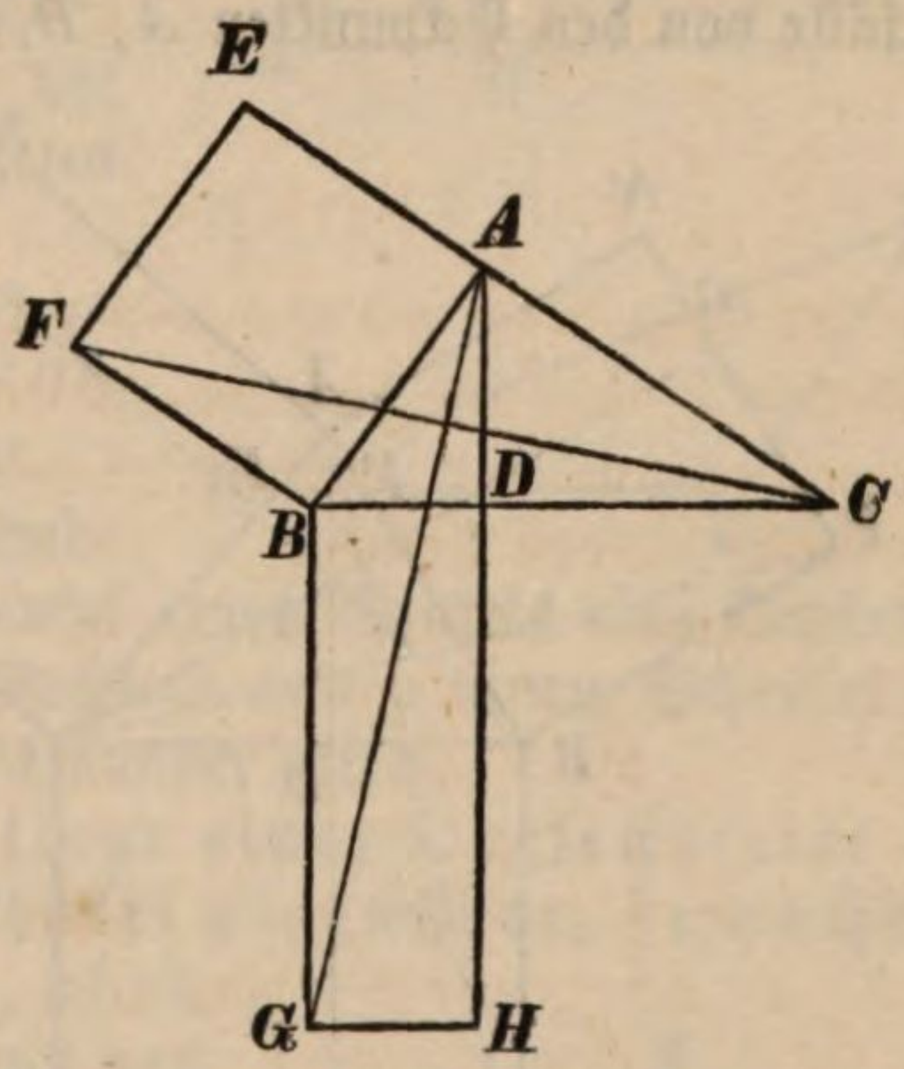
Lehrsatz 112. Zieht man durch einen beliebigen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms Parallellinien mit den Seiten desselben, so sind die beiden hierdurch entstehenden Parallelogramme, durch welche die Diagonalen nicht gehen, einander gleich.

Beweis durch dreimalige Anwendung von L. 43.

Anmerkung: Nach Euclid werden die beiden genannten Parallelogramme die Complemente der beiden übrigen genannt. Außer ihnen sind noch zwei Paare gleicher Parallelogramme in der Figur. Welche?

Lehrsatz 113. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem ihr anliegenden (durch den Fußpunkt der zugehörigen Höhe gebildeten) Abschnitt der Hypotenuse.

Beweis: Es sei $BAC = 90^0$, AD senkrecht zu BC, $ABFE$ das Quadrat über AB, $BDHG$ das Rechteck aus den Seiten BD und $BG = BC$, so ziehe man FC und AG und beweise die Congruenz der Dreiecke FBC und ABG (L. 31), zeige, daß $\triangle FBC = \frac{1}{2}ABFE$ und $\triangle ABG = \frac{1}{2}BDHG$ ist (L. 108), und daß also, da $\triangle ABC$ gleich ABG ist, auch $ABFE = BDHG$ ist.



Anmerkung: Der vorstehende Lehrsatz läßt sich auch aus L. 92 b folgern, welcher den hier in geometrischer Form aufgestellten Satz in arithmetischer Form enthält. In ähnlicher Weise läßt sich auch L. 92 a in geometrischer Fassung aufstellen und durch Construction (z. B. mittelst L. 112) beweisen.

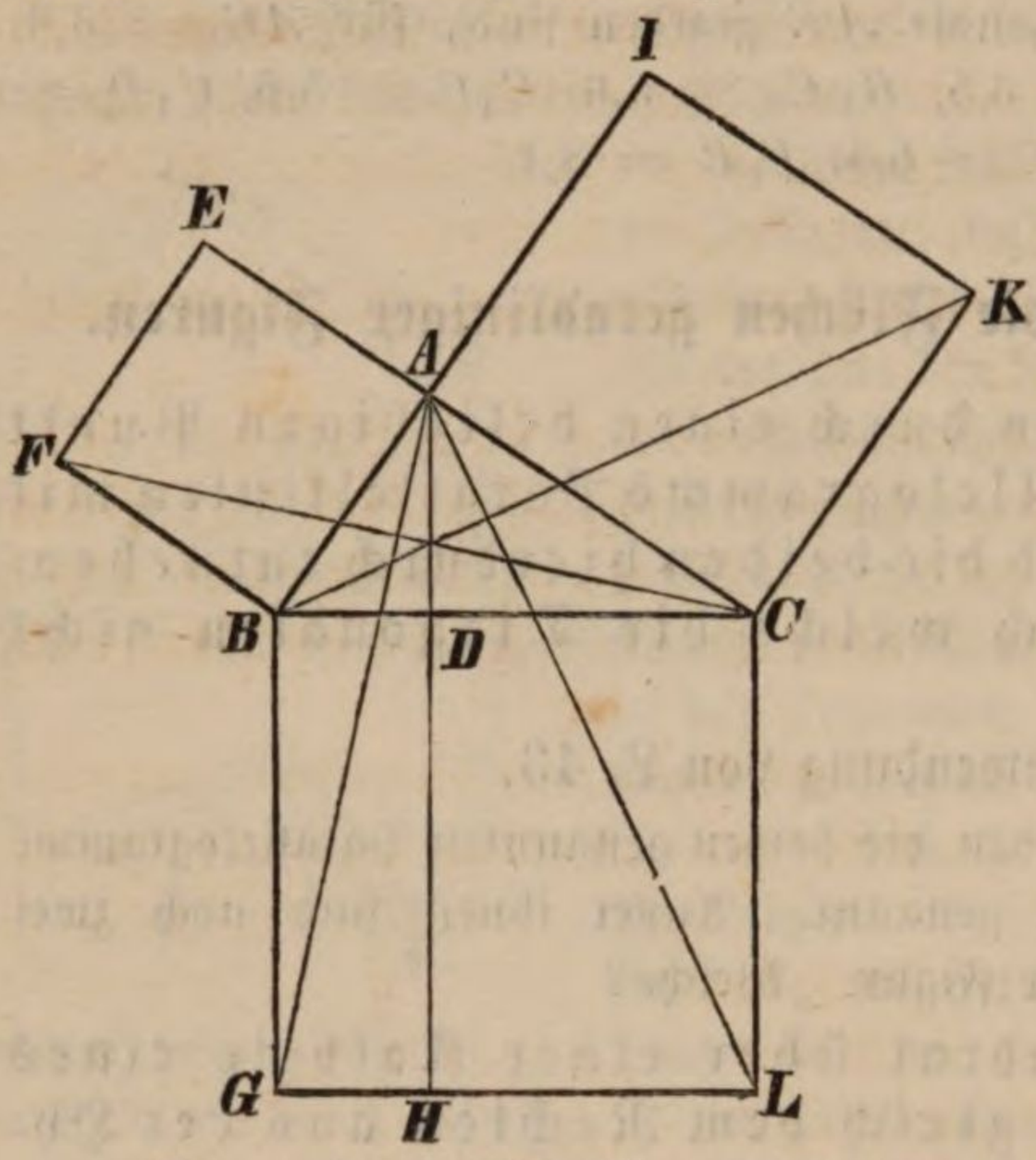
Lehrsatz 114. Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den Katheten (Pythagoreischer Lehrsatz).

Beweis: Man wende den Lehrsatz 113 auf die Quadrate beider Katheten — nach Anleitung umstehender Figur — an, und folgere:

$$ABFE + ACKI = BDHG + CDHL = BCLG.$$

Anmerkung: Der vorstehende Beweis heißt der Euclid'sche. Ein anderer Beweis — in arithmetischer Form — ist in L. 93 bereits angegeben. Außerdem haben verschiedene Mathematiker noch eine große Anzahl anderer Beweise dieses

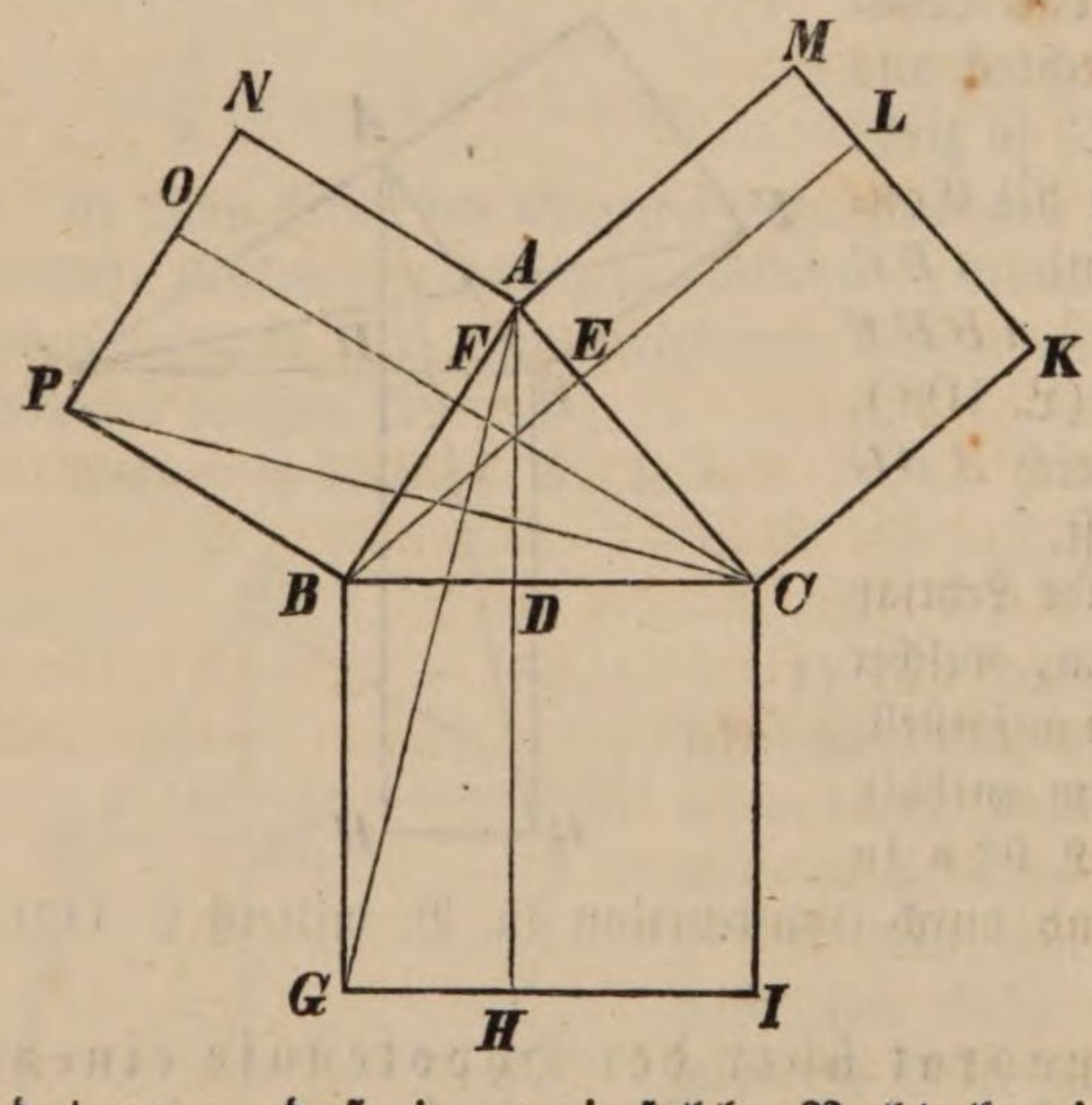
höchst wichtigen Lehrsatzes aufgestellt, von denen einige im Anhang 4 aufgeführt werden. Vergl. auch Anhang 4.



Zusatz: Das Quadrat einer Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Quadrate der Hypotenuse minus dem Quadrate der anderen Kathete.

Lehrsatz 115. Das Quadrat einer Seite eines Dreiecks, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection*) der anderen auf diese.

Beweis: Es seien $ABPN$, $BGIC$, $CAMK$ die bezüglich über den Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC construirten Quadrate. Man fälle von den Eckpunkten A, B, C die Höhen AD, BE, CF auf die gegenüberliegenden Dreiecksseiten und verlängere sie bis zu den gegenüberliegenden Seiten der Quadrate, von denen jedes hierdurch in zwei Rechtecke getheilt ist. Zieht man PC und AG, so ist $\triangle PBC \cong ABG$ (L. 31), das Dreieck PBC aber ist (L. 108) gleich der Hälfte des auf derselben Grundlinie PB stehenden Rechteckes $PBFO$ und ebenso das Dreieck ABG gleich der Hälfte des Rechteckes $BDHG$. Durch ähnliche Beweise für die in A, wie für die in C aneinanderstoßenden Rechtecke, findet man, daß je zwei solche Rechtecke einander gleich sind. Daher ist



$$BGIC = BDHG + CDHI = PBFO + KCEL =$$
$$ABPN + CAMK - NAFO - MAEL,$$

oder $BGIC = ABPN + CAMK - 2 \cdot NAFO$, was zu beweisen war.

---

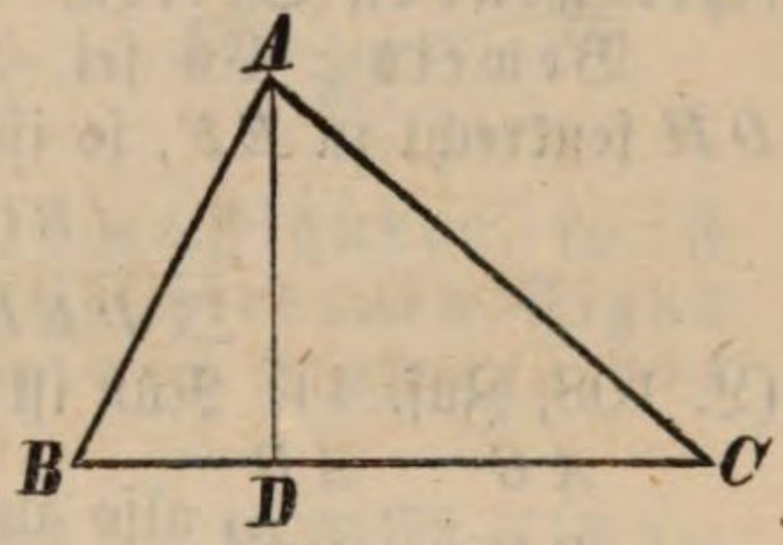
*) Projection einer Linie a auf eine andere b ist derjenige Abschnitt der letzteren, welcher mit a zwischen denselben zu b senkrechten Linien liegt.

Ist einer der Winkel des Dreiecks ein rechter, so verschwinden die beiden in seinem Scheitel aneinanderstoßenden Rechtecke, ist einer der Winkel ein stumpfer, so fallen die seinem Scheitel anliegenden Rechtecke außerhalb der betreffenden Quadrate, und diese sind nicht mehr gleich den Summen, sondern gleich den Differenzen je zweier Rechtecke. Im Uebrigen bleibt der Beweis im Wesentlichen derselbe wie vorher.

Auf dieselbe Weise findet man für das Quadrat der einem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Dreiecksseite den

Lehrsatz 116. Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf diese.

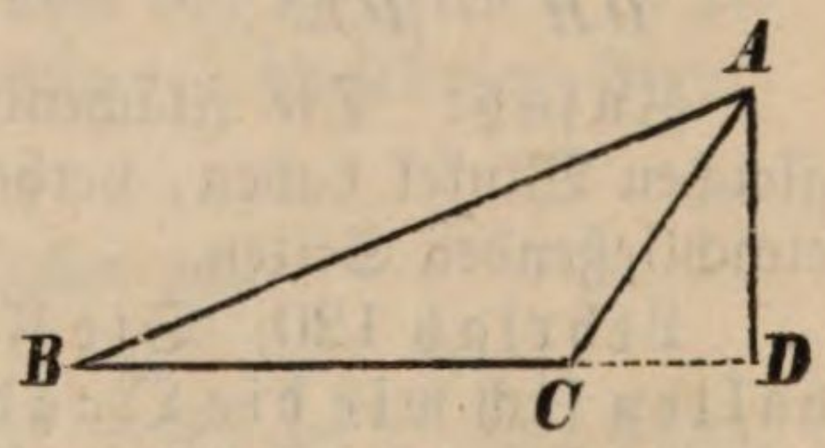
Anmerkung: Die Lehrsätze 114—116 lassen sich zu einem einzigen allgemeinen Satze vereinigen. Derselbe wird der allgemeine pythagoreische Lehrsatz genannt.



Der Beweis desselben kann unter Anwendung des speciellen pythagoreischen Lehrsatzes auch, wie folgt, in arithmetischer Form geführt werden:

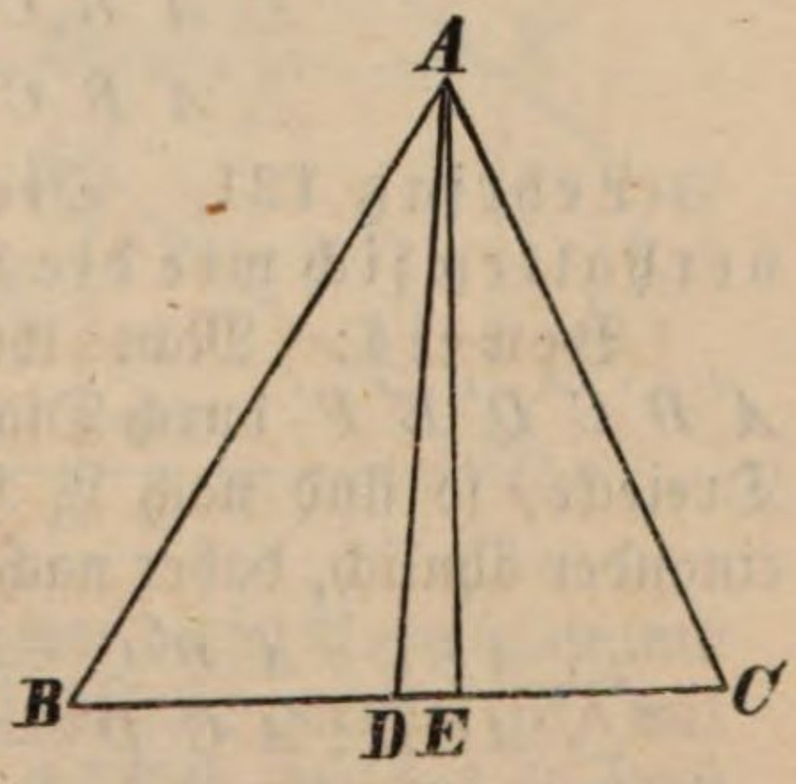
Es sei AD senkrecht zu BC, so ist $AB^2 = AD^2 + BD^2$, $AD^2 = AC^2 - CD^2$, $BD = BC \mp CD$, wobei das Zeichen $-$ für einen spitzen, das Zeichen $+$ für einen stumpfen Winkel ACB gilt. Also ist

$AB^2 = AC^2 - CD^2 + (BC \mp CD)^2 =$
$AC^2 - CD^2 + BC^2 \mp 2\,BC\,.\,CD + CD^2,$
oder $AB^2 = AC^2 + BC^2 \mp 2\,.\,BC\,.\,CD.$



Zusatz: Fällt man von dem Endpunkte eines jeden der begrenzten Schenkel eines Winkels eine Senkrechte auf den anderen Schenkel, so sind die Rechtecke aus je einem Schenkel und der Projection des anderen auf diesen einander gleich.

* Lehrsatz 117. Umgekehrt liegt einer Dreiecksseite ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel gegenüber, je nachdem das Quadrat derselben kleiner, eben so groß oder größer als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten ist. — Beweis indirect.



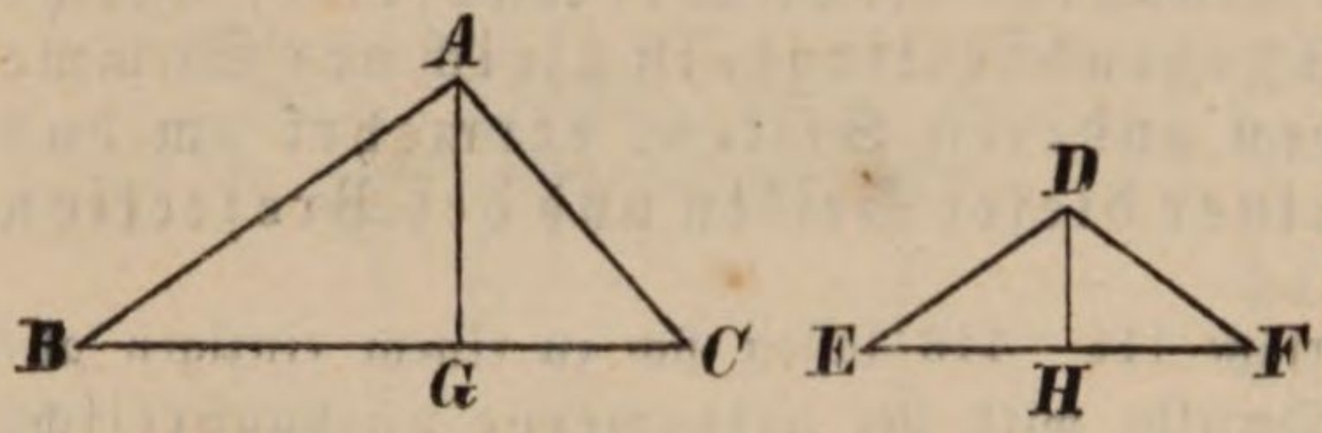
* Lehrsatz 118. Die Summe der Quadrate zweier Seiten eines Dreiecks ist gleich dem halben Quadrat der dritten Seite, vermehrt um das doppelte Quadrat derjenigen Linie, welche den Halbirungspunkt der dritten Seite mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet.

Beweis: Es sei AD die genannte „Mittellinie", also $BD = DC$,

und es sei ferner AE senkrecht zu BC, so ist nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatze

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2\ BD \cdot DE,$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2\ .\ DC \cdot DE, \text{ also, da } BD = DC \text{ ist,}$$
$$AB^2 + AC^2 = 2\ AD^2 + 2\ BD^2$$
$$= 2 \cdot AD^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{4} BC^2, \text{ oder } = 2\ AD^2 + \tfrac{1}{2} BC^2.$$

Wie ist dieser Beweis abzuändern, wenn der Winkel C ein rechter oder ein stumpfer ist?



Lehrsatz 119. Die Flächeninhalte von Dreiecken, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich, wie die Producte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Beweis: Es sei $\sphericalangle ABC = DEF$ und AG senkrecht zu BC, DH senkrecht zu EF, so ist

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC \cdot AG}{EF \cdot DH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH}$$

(L. 108, Zus. 4). Nun ist $\triangle ABG \backsim DEH$ (L. 87), daher

$$\frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE}, \text{ also auch } \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AB}{DE} = \frac{BC\ .\ AB}{EF\ .\ DE}.$$

Zusatz: Die Flächeninhalte von Parallelogrammen, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich, wie die Producte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Lehrsatz 120. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis: Ist $\triangle ABC \backsim A'B'C'$, also $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, so ist nach L. 119: $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot BC.}{A'B' \cdot B'C'}$. Da aber zufolge der Voraussetzung $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ist, so ist

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot AB}{A'B' \cdot A'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

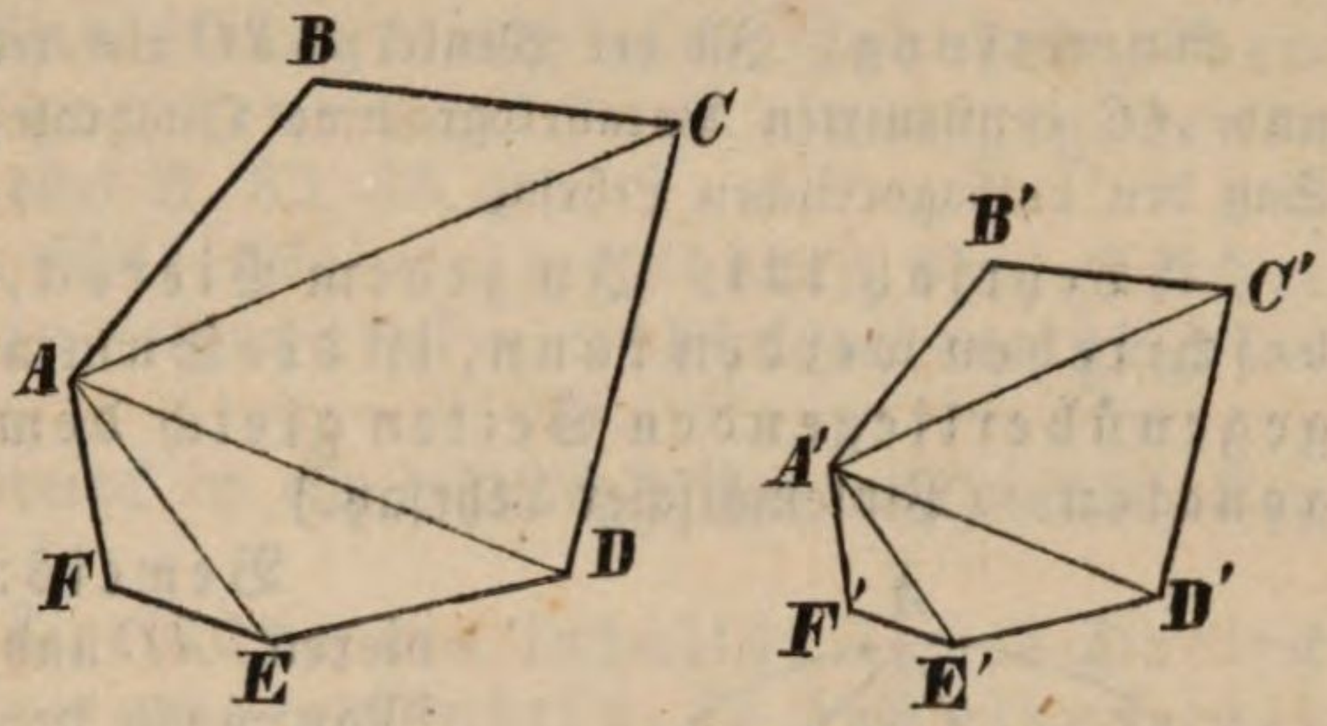
Lehrsatz 121. Die Flächeninhalte ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis: Man theile die ähnlichen Polygone $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ durch Diagonalen von homologen Winkelpunkten aus in Dreiecke, so sind nach L. 100 je zwei gleichliegende von diesen Dreiecken einander ähnlich, daher nach L. 120:

$$\triangle ABC : A'B'C' = AB^2 : A'B'^2,$$
$$\triangle ACD : A'C'D' = CD^2 : C'D^2, \text{ oder, da nach Voraussetzung}$$
$$CD : C'D' = AB : A'B', \text{ also auch}$$
$$CD^2 : C'D'^2 = AB^2 : A'B'^2 \text{ ist,}$$

$\triangle ACD : A'C'D' = AB^2 : A'B'^2$. Ebenso findet man
$\triangle ADE : A'D'E' = DE^2 : D'E'^2 = AB^2 : A'B'^2$,
$\triangle AEF : A'E'F' = EF^2 : E'F'^2 = AB^2 : A'B'^2$.
Da also $\triangle ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D' = ADE : A'D'E' = AEF : A'E'F' = AB^2 : A'B'^2$ ist, so ist auch (Arithm. Anhang 1, n. 7) $\triangle ABC + ACD + ADE + AEF : A'B'C' + A'C'D' + A'D'E' + A'E'F' = AB^2 : A'B'^2$, oder $ABCDEF : A'B'C'D'E'F' = AB^2 : A'B'^2$.

Zusatz: Die Flächeninhalte ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Diagonalen (oder überhaupt homologer Linien).



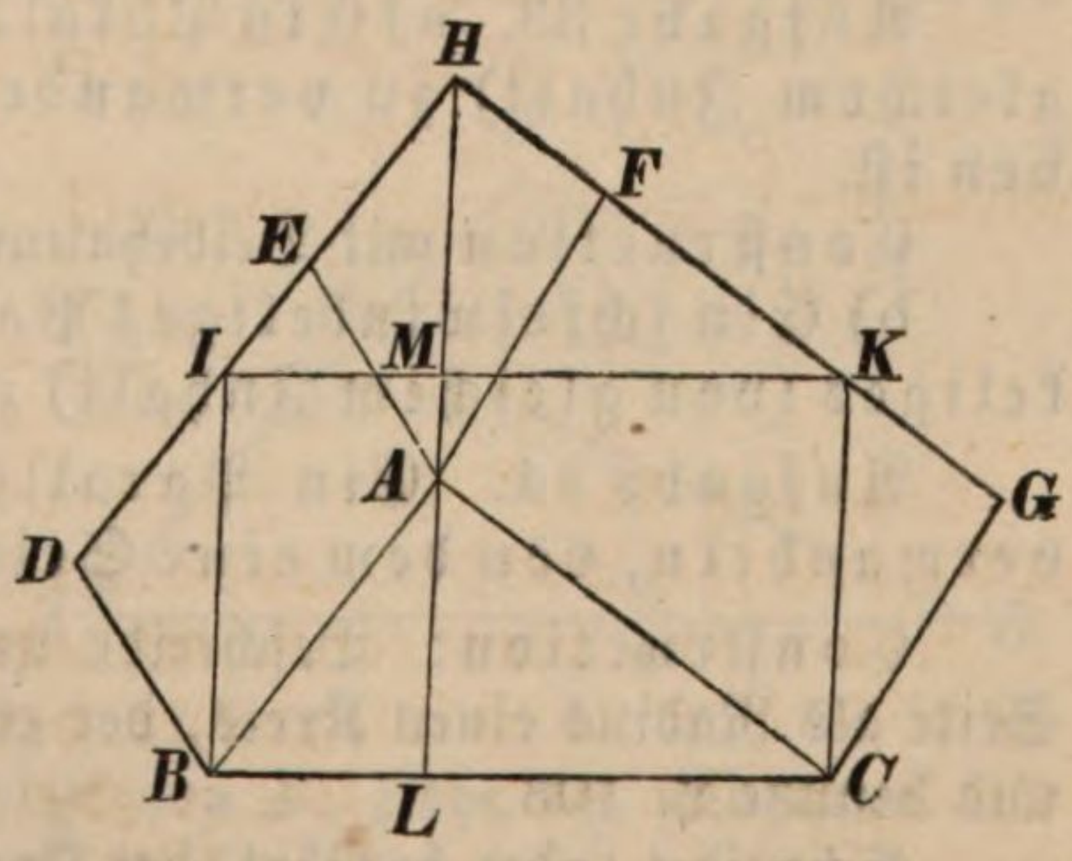
*Lehrsatz 122. Construirt man über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks als homologen Seiten ähnliche geradlinige Figuren, so ist der Inhalt der über der Hypotenuse beschriebenen Figur gleich der Summe der Inhalte der über den Katheten beschriebenen.

Beweis: Es seien A, B die Flächen der über den Katheten a, b beschriebenen, C die Fläche der über der Hypotenuse c beschriebenen Figur, so ist nach L. 121:

$$\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{B}{C} = \frac{b^2}{c^2}, \text{ daher auch}$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{a^2+b^2}{c^2}.$$ Nun ist $a^2 + b^2 = c^2$ (L. 114), also auch $A + B = C$.

*Lehrsatz 123. Construirt man über jeder von zwei Seiten eines Dreiecks ABC nach auswärts ein beliebiges Parallelogramm, verlängert die den Dreiecksseiten AB, AC bezüglich gegenüber liegenden Seiten DE, GF der Parallelogramme, bis sie sich in H schneiden, zieht dann durch H und A eine Gerade und zu dieser Geraden durch die Endpunkte der dritten Seite BC parallele Linien BI, CK und verbindet schließlich die Durchschnittspunkte I, K jeder dieser Parallelen und derjenigen Linie, welche der ihr anliegenden Dreiecksseite parallel ist, mit einander, so entsteht ein drittes Parallelogramm $BIKC$, welches so groß ist, wie die beiden ersten zusammen. (Satz des Pappus.)

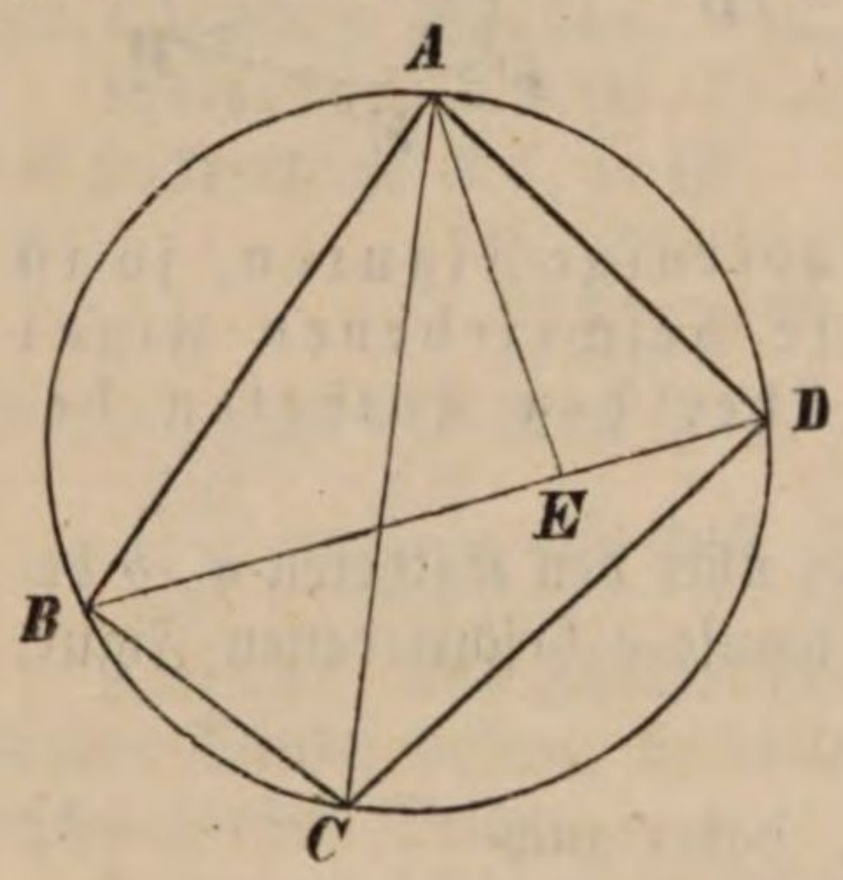


Beweis: a) Es sind IB und CK nach Construction parallel zu HA, daher ist auch IB parallel zu CK. Ferner sind IB und CK gleich HA (L. 43, Zus. 1), also ist auch $IB = CK$. Folglich ist $BIKC$ ein Parallelogramm (L. 45).

b) Die Verlängerung von HA schneide BC in L und IK in M, so ist $BAED = BAHI$ (L. 103) und $BAHI = BIML$, also auch $BAED = BILM$. Ebenso ist $CAFG = CAHK = CKML$, also ist auch $BAED + CAFG = BIML + CKML = BIKC$.

Anmerkung: Ist der Winkel BAC ein rechter, und sind die über AB und AC construirten Parallelogramme Quadrate, so erhält man aus diesem Satz den pythagoreischen Lehrsatz.

* Lehrsatz 124. In jedem Viereck, um welches ein Kreis beschrieben werden kann, ist die Summe der Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten gleich dem Rechteck aus den Diagonalen. (Ptolemäischer Lehrsatz.)



Beweis: $ABCD$ sei ein Kreisviereck, AC und BD seien seine Diagonalen. Man mache den Winkel $DAE = BAC$, so ist auch $\sphericalangle BAE = DAC$, und $\triangle AED \backsim ABC$, $\triangle ABE \backsim ACD$, daher

1) $AD : AC = DE : BC$

2) $AC : CD = AB : BE$, also

$AD \cdot BC = AC \cdot DE$ und

$AB \cdot CD = AC \cdot BE$, daher auch

$AD \cdot BC + AB \cdot CD$

$= AC \cdot (DE + BE) = AC \cdot BD$.

§ 37. Aufgaben zu § 33—36.

a) Verwandlung von Figuren in inhaltsgleiche.

Aufgabe 33. a) Ein Parallelogramm in ein anderes (von gleichem Inhalt) zu verwandeln, von dem ein Winkel gegeben ist.

Construction mit Beibehaltung der Grundlinie, L. 103.

b) Ein schiefwinkeliges Parallelogramm in ein rechtwinkeliges (von gleichem Inhalt) zu verwandeln.

Aufgabe 34. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben ist.

Construction: Beschreibe um einen Eckpunkt mit der gegebenen Seite als Radius einen Kreis, der eine gegenüberliegende Seite schneidet, und benutze L. 103.

Schneidet (oder berührt) der Kreisbogen keine der gegenüberliegenden Seiten — ist also die gegebene Seite kleiner als die kleinere Höhe des gegebenen Parallelogramms — so verwandele man dieses zunächst in ein inhaltsgleiches mit einer Seite von solcher Länge, daß die zu dieser Seite als Grundlinie gehörige Höhe des letzteren kleiner ist als die gegebene Linie

und verwandele dieses Hülfsparallelogramm in das gesuchte. Eine andere Construction siehe in der folgenden Aufgabe.

Besonderer Fall: Ein gegebenes ungleichseitiges Parallelogramm in ein inhaltsgleiches gleichseitiges zu verwandeln.

Aufgabe 35. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Seite und dieselben Winkel, wie das gegebene Parallelogramm hat.

Construction mittelst L. 112.

Aufgabe 36. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel hat. A. 34. 33, oder A. 33. 35.

Aufgabe 37. Ein Dreieck in ein anderes von gleicher Grundlinie und Höhe zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel hat.

Ein schiefwinkeliges Dreieck in ein inhaltsgleiches rechtwinkeliges zu verwandeln.

Aufgabe 38. Ein Dreieck in ein inhaltsgleiches Dreieck auf derselben Grundlinie zu verwandeln, so daß eine seiner Seiten durch einen gegebenen Punkt geht. L. 108, Zus. 1.

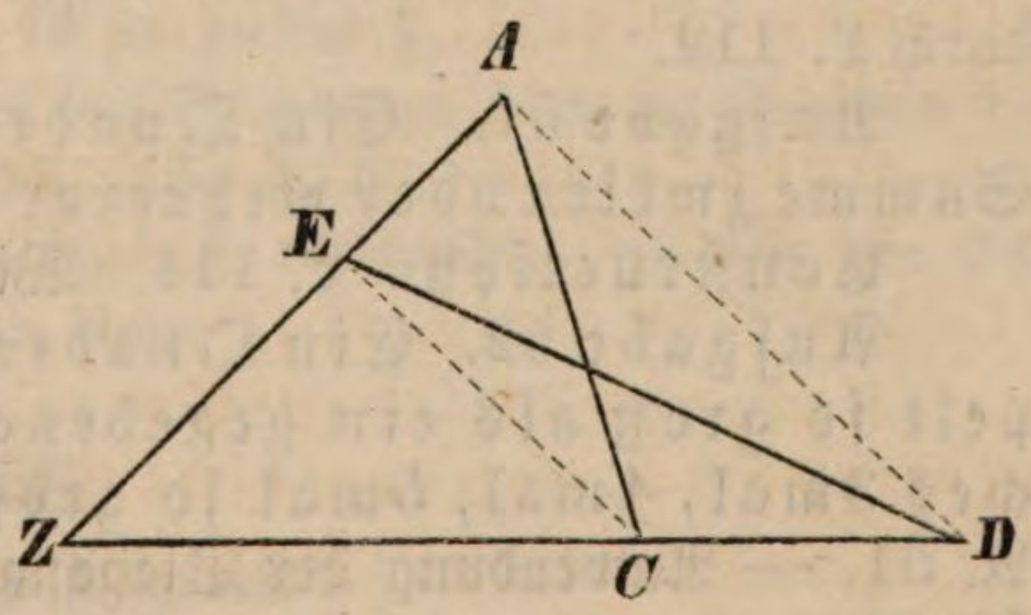
Aufgabe 39. Ein Dreieck in ein inhaltsgleiches auf derselben Grundlinie zu verwandeln, so daß seine Spitze auf einer gegebenen, der Grundlinie nicht parallelen Geraden liegt. L. 108, Zus. 1.

Aufgabe 40. Ein Dreieck in ein inhaltsgleiches Parallelogramm zu verwandeln a) mit derselben Grundlinie, b) mit derselben Höhe, c) mit gegebener Grundlinie. L. 108. A. 34.

Aufgabe 41. Ein Parallelogramm in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln. Unterscheidung der Fälle a, b, c, wie vorher.

Aufgabe 42. Ein Dreieck in ein anderes, inhaltsgleiches zu verwandeln, welches mit jenem einen Winkel gemein hat, wenn außerdem a) die Grundlinie, oder b) die Höhe gegeben ist.

Construction: Es sei AZC das gegebene Dreieck. Man trage auf ZC von Z aus eine Strecke ZD gleich der gegebenen Grundlinie ab, ziehe AD, sowie $CE \parallel AD$ und verbinde D mit E. Die Construction ist im Wesentlichen dieselbe, wenn $ZD < ZC$, wie wenn $ZD > ZC$ ist. Ist die Höhe gegeben, so bestimme man zuerst durch eine Parallele zu ZC die Lage von E, ziehe EC und dann $AD \parallel EC$.



Beweis. $\triangle ACE = DCE$ (L. 108, Zus. 1), daher $\triangle ZEC + ACE = ZEC + DCE$, oder $\triangle AZC = EZD$.

Aufgabe 43. Ein Dreieck in ein inhaltsgleiches zu verwandeln, dessen Grundlinie mit der des ersteren in derse-

ben Geraden liegt, und deſſen Spitze in einem gegebenen Punkte einer Seite des erſteren (oder ihrer Verlängerung) liegt. Vergl. A. 42.

Aufgabe 44. Ein Dreieck in ein inhaltsgleiches zu verwandeln, deſſen Grundlinie mit der des erſteren in derſelben Geraden und deſſen Spitze in einem a) innerhalb, b) außerhalb des erſteren gegebenen Punkte liegt.

Conſtruction durch eine Parallele zur Grundlinie. A. 43. 38.

Aufgabe 45. Ein Polygon in ein anderes, inhaltsgleiches zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Conſtruction: Man ſchneide durch eine Diagonale ein Dreieck von dem Polygon ab und erſetze daſſelbe durch ein inhaltsgleiches über der Diagonale als Grundlinie, ſo daß eine Seite des letzteren mit der anſtoßenden Polygonſeite in derſelben Richtung liegt.

Aufgabe 46. Ein Polygon in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln.

Conſtruction durch wiederholte Anwendung von A. 45.

Aufgabe 47. Ein Polygon in ein inhaltsgleiches Rechteck zu verwandeln. A. 46. 40.

Aufgabe 48. Ein Rechteck in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln.

Die Conſtruction kann nach Anleitung des L. 113, oder des L. 92, oder mit Hülfe von L. 97, Zuſ. 2 oder L. 99 ausgeführt werden. Vergl. Aufg. 29.

Aufgabe 49. Ein gegebenes Polygon in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln.

Conſtruction: A. 47. A. 48.

Anmerkung: Mit dieſer Aufgabe iſt die Inhaltsbeſtimmung oder die Quadratur geradliniger Figuren durch geometriſche Conſtruction gelöſt.

Aufgabe 50. Ein Quadrat in ein inhaltsgleiches Rechteck zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben iſt.

Conſtruction wie bei Aufg. 48, in umgekehrter Anordnung, oder durch L. 112.

Aufgabe 51. Ein Quadrat zu conſtruiren, welches der Summe zweier oder mehrerer Quadrate gleich iſt.

Conſtruction: L. 114. Wiederholte Anwendung deſſelben.

Aufgabe 52. Ein Quadrat zu conſtruiren, welches doppelt ſo groß als ein gegebenes iſt. Ebenſo ein ſolches, welches 3mal, 4mal, 5mal ſo groß als ein gegebenes iſt. Vergl. A. 51. — Anwendung der Diagonale des gegebenen Quadrats. $4a^2 = (2a)^2$.

Aufgabe 53. Ein Quadrat zu conſtruiren, welches gleich der Differenz zweier gegebener Quadrate iſt.

Conſtruction: L. 114, Zuſ.

Aufgabe 54. Zu zwei gegebenen ähnlichen Figuren eine dritte ähnliche zu conſtruiren, welche gleich der Summe — oder gleich der Differenz — derſelben iſt. L. 122.

Uebungs-Aufgaben.

1) Ein Trapez in ein inhaltsgleiches Parallelogramm zu verwandeln L. 110, Zuſ. 2) Ein regelmäßiges Polygon in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln. L. 111, Zuſ. 3) Es iſt eine Linie gleich 1 gegeben; man conſtruire eine Linie, welche gleich $\sqrt{2}$, oder $\sqrt{3}$, oder $\sqrt{5}$ iſt, u. ſ. w. (Anmerkung: Man kann z. B. $\sqrt{19} = \sqrt{18+1}$, oder gleich $\sqrt{16+3} = \sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}$, oder gleich $\sqrt{25-7} = \sqrt{5^2-(\sqrt{7})^2}$, oder gleich $\sqrt{4^2+2^2-1^2}$ u. dgl. m. ſetzen.)

4) Ein Dreieck in ein inhaltsgleiches über derſelben Grundlinie zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel an der Spitze hat. A. 22. L. 108, Zuſ. 1.

5) Ein gegebenes gleichſchenkeliges Dreieck in ein Parallelogramm von gleichem Inhalt und gleichem Umfang zu verwandeln.

6) Dieſelbe Aufgabe für ein ungleichſeitiges Dreieck.

Conſtr.: Das Parallelogramm kann zur Grundlinie die Hälfte der Grundlinie des Dreiecks erhalten. A. 34.

7) Ein Quadrat in ein Rechteck a) mit gegebenem Umfang, b) mit gegebener Differenz zweier anliegender Seiten zu verwandeln. — Vergl. die Conſtructionen zu A. 50.

8) Ein Dreieck zu conſtruiren, welches einem gegebenen Dreieck inhaltsgleich und einem anderen gegebenen ähnlich iſt. Anal.: Iſt h die Höhe, g die Grundlinie des erſteren, h_1 die Höhe, g_1 die Grundlinie des letzteren Dreiecks, a eine Seite des letzteren, x die homologe des geſuchten, ſo iſt $x : a = \sqrt{h \cdot g} : \sqrt{h_1 g_1}$ (L. 120). A. 29. 27.

9) Ein gegebenes Polygon in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenen ähnlich iſt. Conſtr. durch Benutzung von L. 100, Zuſ. 2 und der vorigen Aufgabe, wenn nöthig auch der A. 45, oder durch L. 121 u. A. 49.

10) Ein ungleichſeitiges Dreieck in ein gleichſchenkeliges zu verwandeln, welches denſelben Flächeninhalt und denſelben Winkel an der Spitze hat. L. 119. A. 29.

11) Ein gegebenes ungleichſeitiges Dreieck in ein inhaltsgleiches gleichſeitiges zu verwandeln. Uebungs-Aufg. 4 und 10 zu dieſem §.

12) Ein Trapez in ein gleich großes Parallelogramm über der kleineren der parallelen Seiten zu verwandeln. L. 110, Zuſ. A. 35.

13) Zu einem Dreieck ein inhaltsgleiches zu conſtruiren, ſo daß jede Ecke des letzteren auf einer gegebenen Geraden liegt.

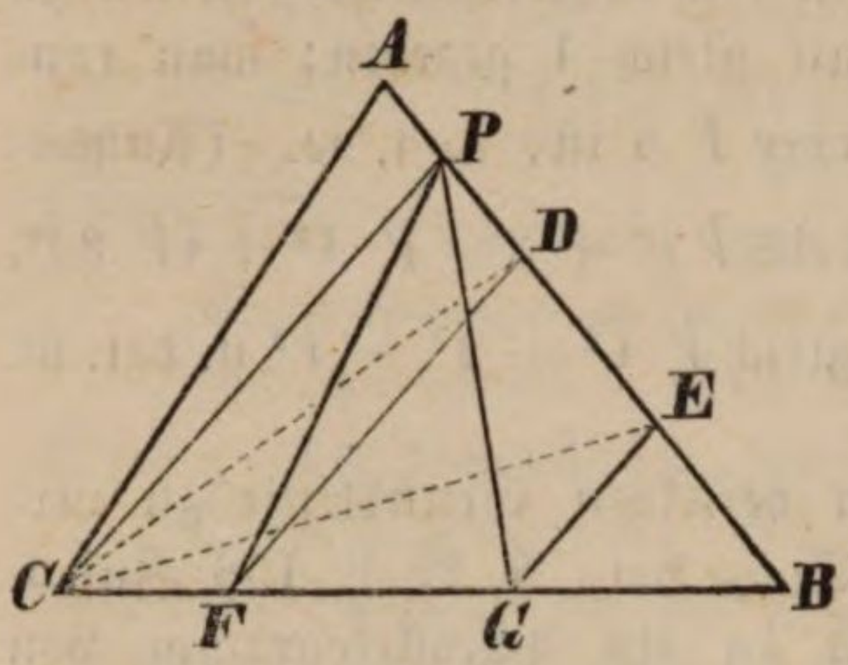
§ 38.

b) Theilungs-Aufgaben.

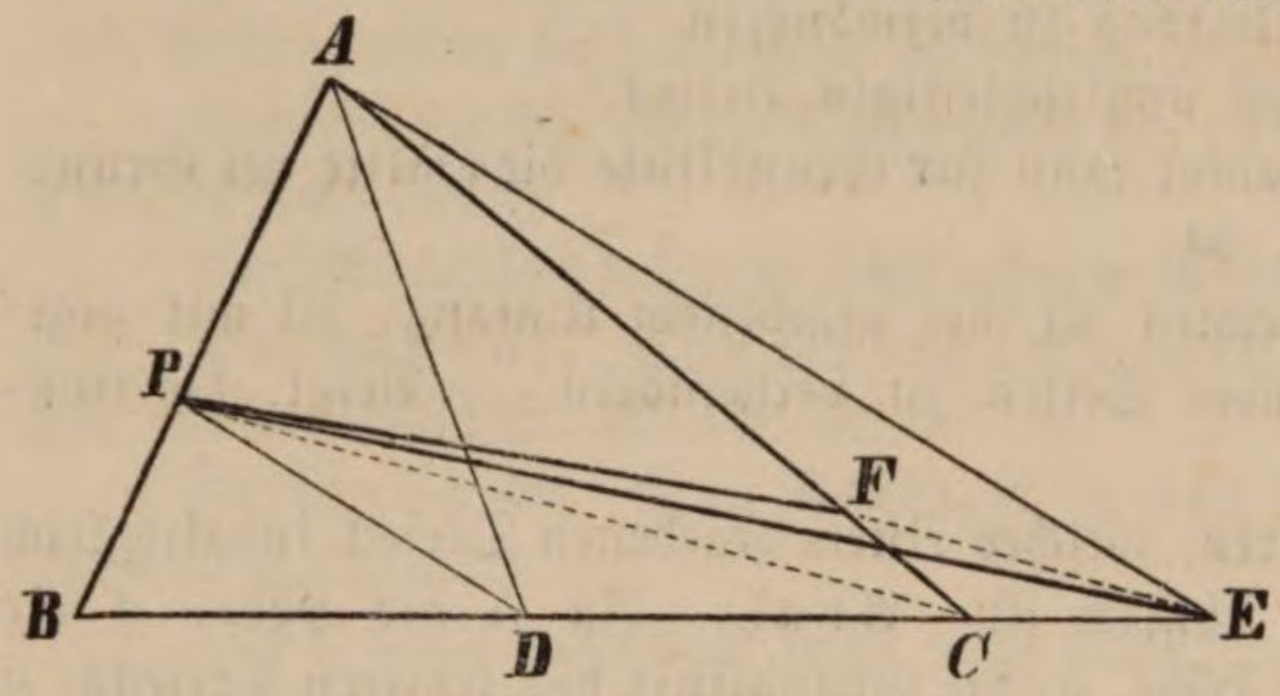
Aufgabe 55. Ein Dreieck durch Linien, welche von einem Eckpunkt auslaufen, in n gleiche Theile zu theilen. A. 20. L. 108, Zuſ. 1.

Aufgabe 56. Ein Parallelogramm durch Linien, welche einer Seite parallel laufen, in n gleiche Theile zu theilen. A. 20, L. 103.

Aufgabe 57. Ein Dreieck durch Linien, welche von einem in einer Seite gegebenen Punkt auslaufen, in *n* gleiche Theile zu theilen.



Construction: Theile nach Aufgabe 55 das Dreieck *ABC* in *n* gleiche Theile durch Linien, welche von einem Eckpunkte auslaufen und verwandele die einzelnen Theile in inhaltsgleiche, welche der gestellten Aufgabe genügen. § 37. A. 43. Fällt bei der Verwandlung der Theile einer derselben theilweise außerhalb des gegebenen Dreiecks *ABC* (Fig. 2), z. B. *PBE*, so verwandle man diesen wieder in einen inhaltsgleichen, welcher innerhalb *ABC* liegt. Man ziehe z. B. *PC*, dann *EF* parallel zu *PC* bis zum Durchschnitt mit *AC* in *F* und ersetze schließlich die Theilungslinie *PE* durch *PF*.



Beweis leicht.

Aufgabe 58. Ein Parallelogramm durch Linien, welche durch einen auf einer Seite gegebenen Punkt gehen, in *n* gleiche Theile zu theilen.

Construction: Man theile die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier Gegenseiten (welcher?) in *n* gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte die verlangten Theilungslinien.

Beweis leicht.

Aufgabe 59. Ein Trapez in *n* gleiche Theile zu theilen.

Construction: Durch Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkt und Theilung des entstandenen Dreiecks von diesem Punkte aus in *n* gleiche Theile. Oder durch Theilung der Mittellinie in *n* gleiche Theile und Construction von Linien durch diese Theilpunkte zwischen den parallelen Seiten.

Uebungs-Aufgaben zu § 38.

1) Innerhalb eines Dreiecks ist ein Punkt gegeben und mit der Spitze durch eine Gerade verbunden. Man soll von diesem Punkt eine Linie nach der Grundlinie ziehen, so daß das Dreieck in zwei gleiche Theile getheilt wird. A. 55. 44.

2) Ein Viereck durch eine von einem Eckpunkt ausgehende Gerade in zwei (*n*) gleiche Theile zu theilen. Constr.: Ziehe die dem Eckpunkt gegenüberliegende Diagonale. A. 55. 39.

3) Ein Viereck durch eine Gerade zu halbiren, welche durch einen auf einer Seite gegebenen Punkt geht. Constr. durch die vorige Aufgabe. A. 39.

4) Ein Trapez in zwei gleiche Theile zu theilen, und zwar durch eine Linie,

welche a) durch einen in einer parallelen Seite gegebenen Punkt geht, oder b) von einem Eckpunkt ausgeht, oder c) auf den parallelen Seiten ſenkrecht ſteht. Conſtr. mittelſt Verwandlung des Trapezes in ein Parallelogramm (Rechteck). A. 58. Oder man verwandele das Trapez in ein Dreieck mit derſelben Höhe, ſo daß die Grundlinien in einer Geraden liegen. Andere Conſtr. durch Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zum Durchſchnitt und Theilung der Dreiecke.

5) Ein Dreieck durch gerade Linien, welche von einem Eckpunkt auslaufen, in drei Theile zu theilen, welche im Verhältniß $m : n : p$ ſtehen. L. 108, Zuſ. 3. A. 26.

6) In einem gegebenen Dreieck einen Punkt zu beſtimmen, ſo daß die von ihm nach den Eckpunkten gehenden Geraden das Dreieck in drei gleiche Theile theilen. A. 55, $n = 2$ und $n = 3$.

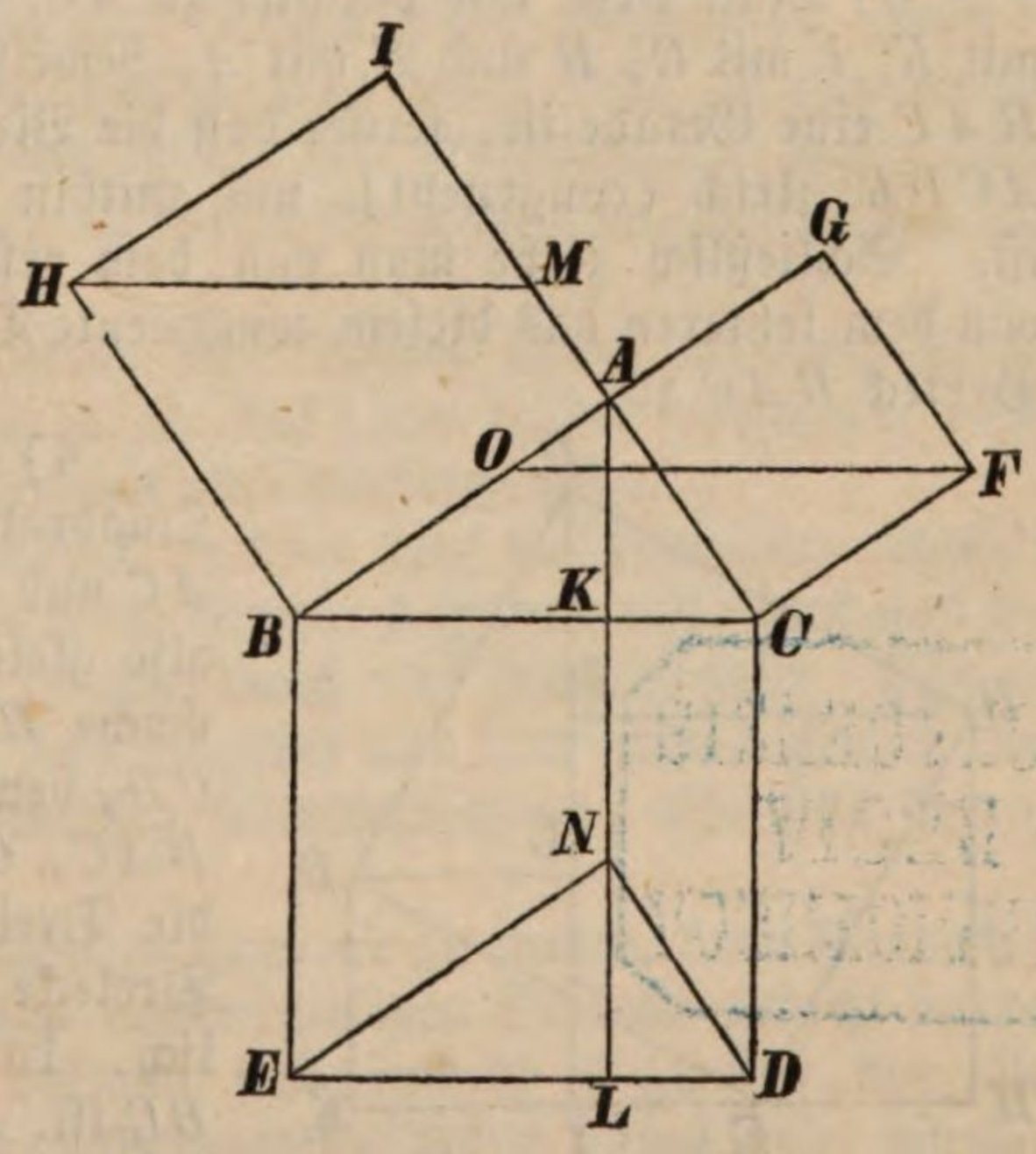
7) Durch einen Eckpunkt C eines gegebenen Dreiecks ABC ſei eine Gerade gezogen und auf derſelben ein Punkt D angenommen, welcher mit A auf derſelben Seite von BC liegt. Man ſoll auf BC einen Punkt E beſtimmen, ſo daß $\triangle CDE = \frac{1}{2} ABC$ iſt. A. 44. L. 108, Zuſ. 3.

8) Ein Dreieck durch zwei Gerade, von denen jede durch einen von zwei auf ſeinem Umfang gegebenen Punkten geht, in drei gleiche Theile zu theilen. A. 57.

Vergl. auch die Aufgaben im Anhang 6.

Anhang 4. Beweiſe des pythagoreiſchen Lehrſatzes.

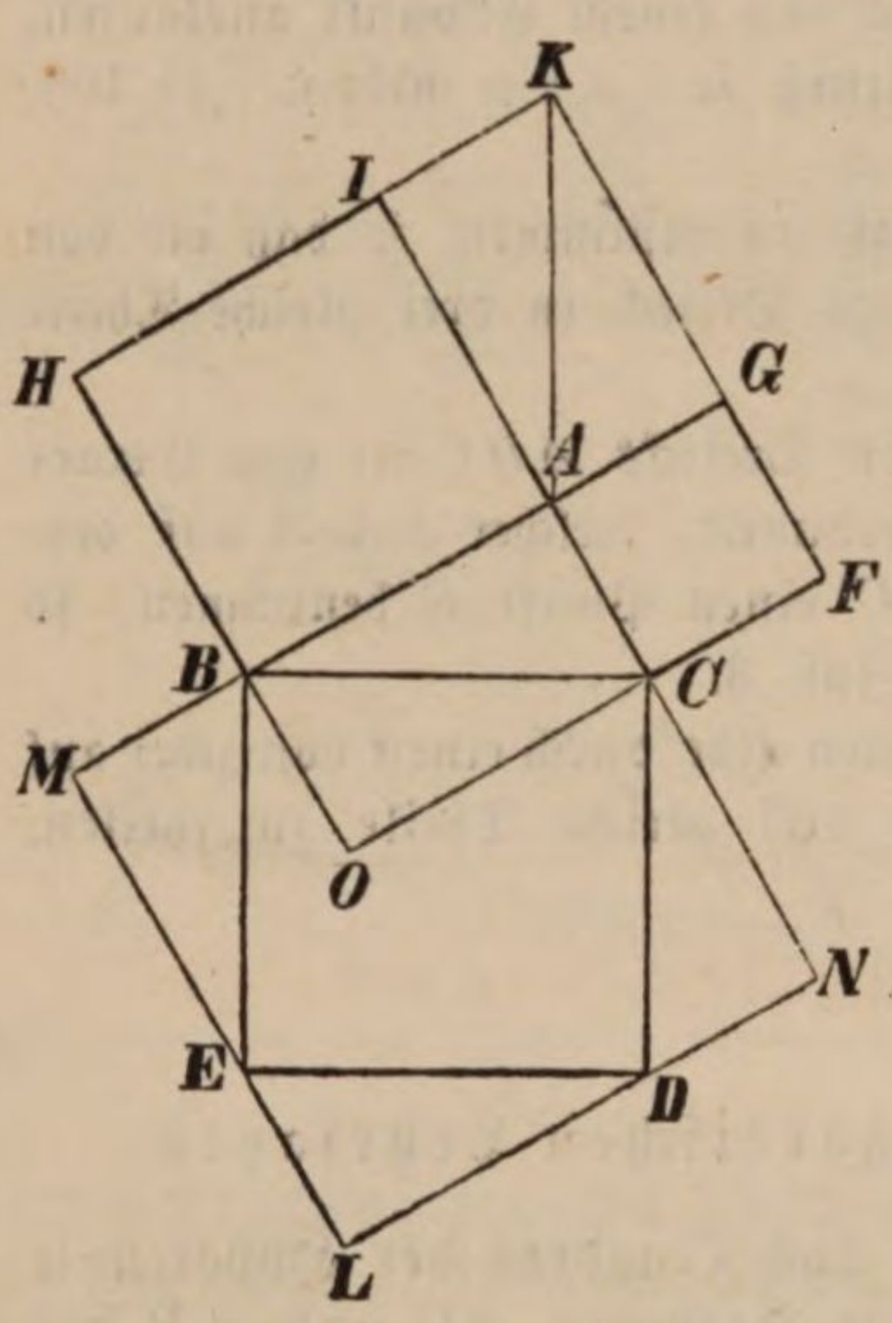
Es bezeichnen im Folgenden $BCDE$ das Quadrat der Hypotenuſe BC, $ACFG$ und $ABHI$ die Quadrate der Katheten AC und AB des bei A rechtwinkeligen Dreiecks BAC. Die Ausführungen der Conſtructionen im Einzelnen ſind aus den Figuren zu erſehen.

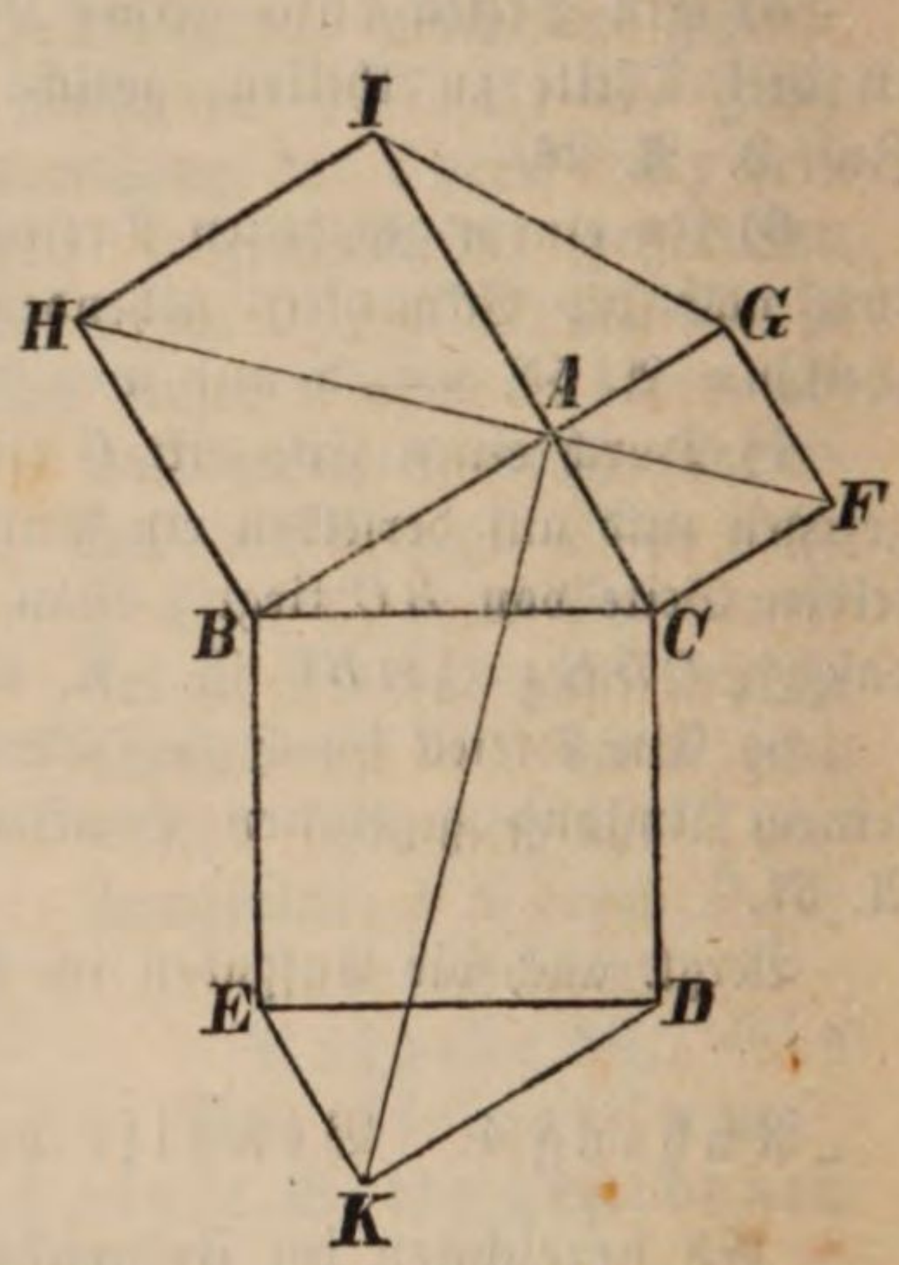


1) Man ziehe AK ſenkrecht zu BC und verlängere AK bis zum Durchſchnittspunkt L mit ED. Man ziehe ferner HM parallel zu BC und zeige, daß IAC eine gerade Linie, alſo $BHMC$ ein Parallelogramm, ferner, daß $ABHI = BHMC$ (L. 103), $BHMC \cong BENA$, $BENA = BELK$, alſo auch $ABHI = BELK$ iſt. Ebenſo beweiſe man mit Hülfe der zu BC, beziehungsweiſe AC, parallelen Linien FO und DN, daß $ACFG = CFOB = CDNA = CDLK$ iſt. Daher iſt auch $ABHI + ACFG = BELK + CDLK = BCDE$.

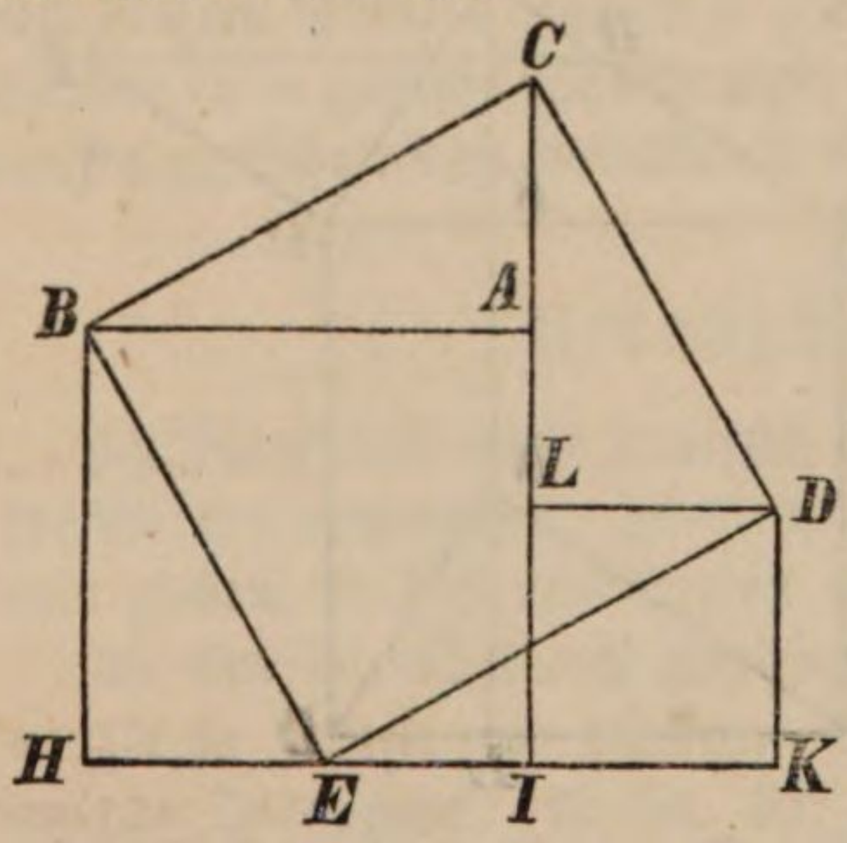
2) Man verlängere HI und FG bis zum Durchſchnitt in K, FC und

HB bis zum Durchschnitt in *O*, ziehe durch *E* eine Parallele *ML* zu *AC* und durch *D* eine Parallele *NL* zu *AB* und verlängere *AC* über *C*, *AB* über *B*, so daß das Viereck *ANLM* entsteht. Man ziehe ferner *AK* und beweise, daß die Dreiecke *AIK*, *AGK*, *BCO*, *CDN*, *DEL*, *BEM* congruent und die Vierecke *HKFO* und *ANLM* congruente Quadrate sind. Dann folgt, daß $HKFO - AIK - AGK - BCO - ABC = ANLM - CDN - DEL - BEM - ABC$, oder: $ABHI + ACFG = BCDE$ ist.





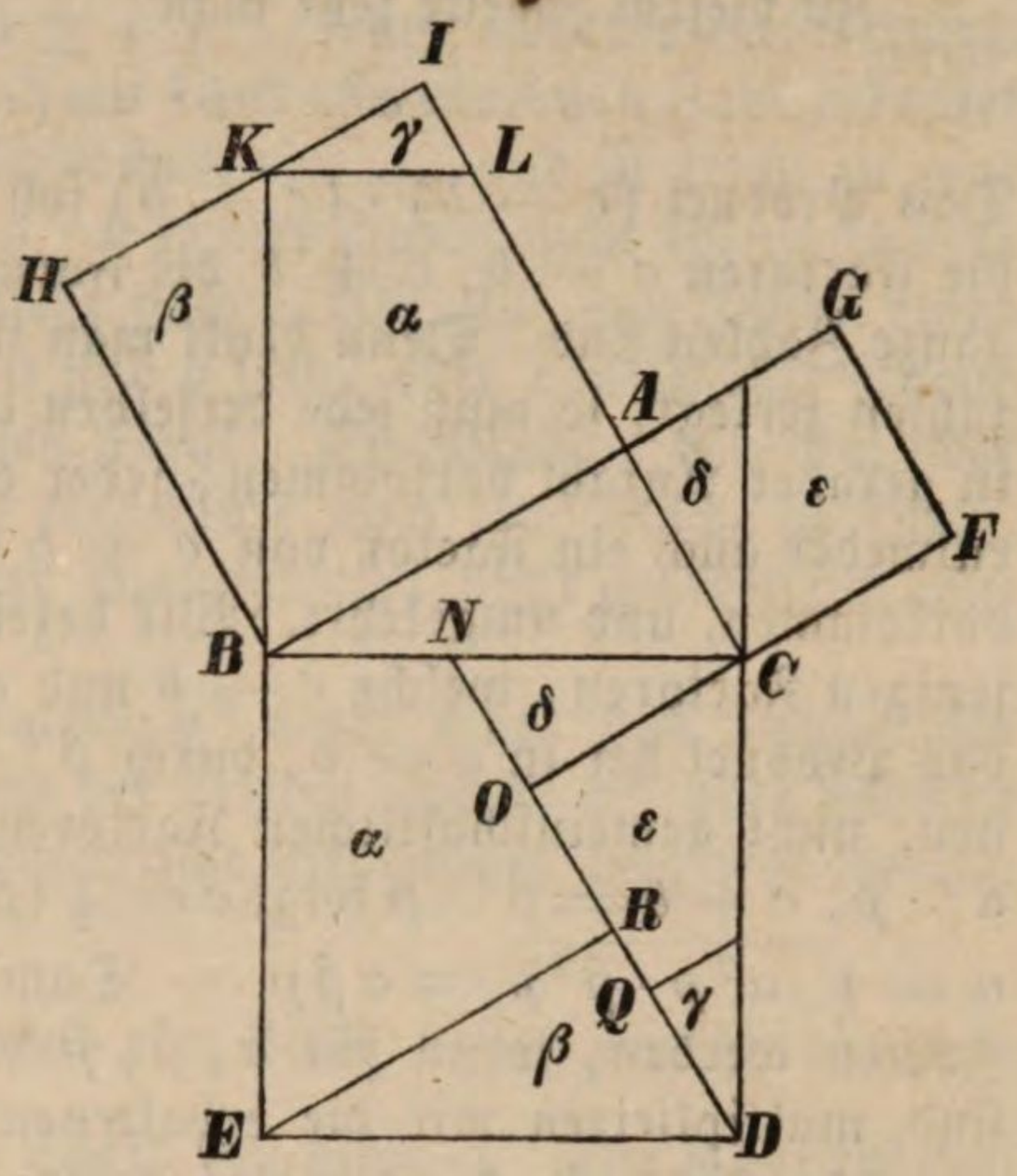
3) Man ziehe *EK* parallel zu *AC*, *DK* parallel zu *AB*, verbinde *A* mit *K*, *I* mit *G*, *H* und *F* mit *A*, beweise, daß $\sphericalangle HAF = 180^0$, also *HAF* eine Gerade ist, ferner daß die Vierecke *HBCF*, *HIGF*, *ABEK*, *ACDK* gleich (congruent), und mithin auch $HIGFCB = ABEKDC$ ist. Schließlich ziehe man von dem ersteren Viereck das Dreieck *IAG*, von dem letzteren das diesem congruente Dreieck *DKE* und von beiden das Dreieck *BAC* ab.



4) Es sei *ABIH* wie vorher das Quadrat über der Kathete *BA*, $LI = AC$ und *LIKD* das Quadrat über *LI*, also gleich dem Quadrate über *AC*. Man mache $HE = AC$, ziehe *DE*, *BE* und *CD*, beweise die Congruenz der Dreiecke *BAC*, *CLD*, *EKD* und *BHE*, ersetze die Dreiecke *EKD* und *BHE* durch die Dreiecke *BAC* und *CLD* und zeige schließlich, daß *BCDE* das Quadrat über *BC* ist.

5) Man verlängere *EB* über *B* bis zum Durchschnitt *K* mit *HI* und ziehe *KL* parallel zu *BC*, so daß das Quadrat *ABHI* in die mit α, β, γ bezeichneten Stücke getheilt wird.

Ferner verlängere man DC über C bis zum Durchſchnitt mit AG, wodurch das Quadrat $ACFG$ in die mit δ und ε bezeichneten Stücke getheilt wird. Man ziehe dann DN parallel zu AC bis zum Durchſchnitt N mit BC, fälle von C auf DN die Senkrechte CO, mache $OQ = GF$, errichte eine Senkrechte in Q auf DN und fälle die Senkrechte ER auf ND und beweiſe, daß die mit α, β, γ, δ, ε bezeichneten Stücke des Quadrats $BCDE$ einzeln den gleich bezeichneten Stücken der beiden anderen Quadrate congruent ſind.



Anmerkung: Ein ſechſter Beweis iſt in § 36, S. 123 angedeutet. Durch Abänderungen in der Lage der Quadrate — von denen jedes ſowohl nach außen, als nach innen conſtruirt werden kann — laſſen ſich der Euclid'ſche Beweis, ſowie einige der vorſtehenden noch auf verſchiedene Weiſe verändern.

Anhang 5. Die pythagoreiſchen Dreiecke.

Berechnet man aus zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks die dritte mittelſt des pythagoreiſchen Lehrſatzes, ſo wird letztere durch Ausziehen einer Quadratwurzel gefunden. Daher erhält man für ſie, wenn die gegebenen Seiten durch rationale Zahlen ausgedrückt ſind, in den meiſten Fällen eine irrationale Zahl. Nur wenn der Radicand der Wurzel eine Quadratzahl iſt, wird auch die dritte Seite durch eine rationale Zahl ausgedrückt.

Rechtwinkelige Dreiecke, deren drei Seiten durch rationale Zahlen ausgedrückt werden können, wie z. B. das ſchon früher erwähnte, deſſen Seiten 3, 4, 5 ſind, heißen rationale oder pythagoreiſche.

Iſt ein ſolches Dreieck gefunden, ſo kann man aus demſelben unzählig viele andere erhalten, indem man die Seiten deſſelben mit einer und derſelben beliebigen Zahl multiplicirt oder durch eine ſolche dividirt. Alle auf dieſe Weiſe erhaltenen Dreiecke ſind einander und dem urſprünglichen ähnlich, da ſie in den Seitenverhältniſſen übereinſtimmen, alſo ſind ſie auch alle rechtwinkelig.

Die Aufgabe, die pythagoreiſchen Dreiecke zu finden, kann hiernach ſo aufgefaßt werden, daß diejenigen rechtwinkeligen Dreiecke geſucht werden ſollen, deren Seitenverhältniſſe rational ſind, und da es genügt, von allen ſolchen Dreiecken, welche dieſelben Seitenverhältniſſe haben, ein einziges zu finden, ſo wird man hierzu als das einfachſte dasjenige wählen, deſſen einzelne Seiten durch ganze Zahlen ausgedrückt werden, welche keine gemeinſchaftlichen Theiler haben.

Es soll also die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ durch ganze positive Werthe für a, b und c erfüllt werden, welche außerdem relative Primzahlen sind.

Zu diesem Zwecke setze man

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b) \cdot (c + b).$$

Das Product $(c - b) \cdot (c + b)$ soll eine Quadratzahl sein, also müssen die Factoren $c - b$, $c + b$ die Form $\alpha^2 \cdot p$, $\beta^2 \cdot p$ haben, wo α, β, p ganze Zahlen sind. Denn denkt man sich $c - b$ und $c + b$ in ihre Primzahlen zerlegt, so muß jede derselben in dem Producte $(c - b) \cdot (c + b)$ in gerader Anzahl vorkommen; jeder einfache Factor von $c - b$ muß also entweder auch ein Factor von $c + b$ sein, oder in $c - b$ selbst zweimal vorkommen, und umgekehrt. Wir bezeichnen nun durch p das Product derjenigen Factoren, welche $c - b$ und $c + b$ gemeinsam haben, durch α^2 das Product der in $c - b$, durch β^2 das Product der in $c + b$ enthaltenen, nicht gemeinschaftlichen Factoren. Aus den Gleichungen $c - b = \alpha^2 \cdot p$, $c + b = \beta^2 \cdot p$ folgt $c = \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) \cdot p$, $b = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \cdot p$, $a = \sqrt{\alpha^2 p \cdot \beta^2 p} = \alpha\beta p$. — Damit aber a, b und c jedenfalls ganze Zahlen werden, wenn für α, β, p beliebige ganze Zahlen angenommen sind, multipliciren wir die erhaltenen Ausdrücke mit 2, und da p ein gemeinschaftlicher Factor der drei Zahlen a, b, c ist, und diese relative Primzahlen sein sollen, so dividiren wir erstere durch p. Auf diese Weise erhalten wir

$$a = 2\alpha\beta, \; b = \beta^2 - \alpha^2, \; c = \beta^2 + \alpha^2.$$

Nimmt man hier für α und β beliebige ganze Zahlen an, so erhält man für a, b, c ganze Zahlen, welche die drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks angeben.

Dabei ist aber noch Sorge zu tragen, daß alle diejenigen Werthe von α und β ausgeschlossen werden, für welche a, b, c einen gemeinschaftlichen Factor erhalten würden.

Hieraus folgt unter Anderem, daß $\beta^2 - \alpha^2$ und $\beta^2 + \alpha^2$ nicht beide durch 2 theilbar sein dürfen, daß also β und α weder gleichzeitig gerade noch gleichzeitig ungerade Zahlen sein dürfen. (Denn wäre z. B. $\beta = 2m + 1$, $\alpha = 2n + 1$, so wäre $\beta^2 - \alpha^2 = 4m^2 + 4m + 1 - (4n^2 + 4n + 1) = 4(m^2 + m - n^2 - n)$, und $\beta^2 + \alpha^2 = 2(2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1)$.)

Auch dürfen überhaupt, wie leicht einzusehen, β und α keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Eine Tafel pythagoreischer Dreiecke, welche hiernach berechnet ist, findet man in der Trigonometrie Anhang 2.

Anhang 6.

Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke und Auflösung von Constructionsaufgaben durch Rechnung.

Bedeuten a, b, $c \cdots$ die Maßzahlen begrenzter gerader Linien (für dasselbe Maß), so bedeutet $a + b$ die Summe der Linien a und b, oder eine Linie, welche so lang ist als a und b zusammen. Die Construction dieser

Summe ist leicht; ebenso bedarf die geometrische Deutung und die Construction der Differenz $a - b$, der arithmetischen Summe $a + b + c + \cdot\cdot$ und der algebraischen Summe $a \pm b \pm c \pm \cdot\cdot$ keiner näheren Erörterung.

Ein Product $n \cdot a$ einer Linie a mit einer unbenannten Zahl bedeutet ebenfalls eine Linie, nämlich ein Vielfaches von a, und ist leicht zu construiren, dagegen kann ein Product $a \cdot b$ zweier Linien nicht ebenfalls eine Linie bezeichnen; dasselbe giebt vielmehr nach L. 107, Zus. den Inhalt eines Rechteckes an, dessen Seiten gleich a und b sind, oder den Inhalt irgend einer anderen, diesem Rechteck gleichen Figur. Ein Product von drei oder mehr Linien $a \cdot b \cdot c \cdot \cdot$ kann weder eine Linie noch eine Fläche bedeuten, kann also (innerhalb der Grenzen der Planimetrie) nicht geometrisch construirt werden.

Ebenso bedeutet die zweite Potenz a^2 einer Linie den Inhalt des Quadrates über der Linie a, während der dritten Potenz a^3, oder höheren Potenzen an dieser Stelle keine geometrische Bedeutung beigelegt werden kann.

Ein Quotient $\frac{a}{n}$, dessen Dividend eine Linie, dessen Divisor eine unbenannte Zahl ist, bedeutet den $n$ten Theil der Linie a. Die Construction desselben ist in A. 20 gezeigt. Ein Quotient $\frac{a}{b}$ zweier Linien dagegen bedeutet das Verhältniß dieser Linien, ist also selbst keine Linie, sondern eine unbenannte Zahl.

Hieraus folgt weiter, daß das Product $\frac{a}{b} \cdot c$ eines solchen Quotienten mit einer dritten Linie c, oder auch ein Ausdruck von der Form

$$x = \frac{a \cdot c}{b}$$

wieder die Bedeutung einer Linie erhalten kann. Da aus $x = \frac{a \cdot c}{b}$, $b \cdot x = a \cdot c$ und $b : a = c : x$ folgt, so ergiebt sich, daß x die vierte Proportionallinie zu b, a und c ist, und daher nach § 31, A. 27 construirt wird.

Anmerkung: Aus $b \cdot x = a \cdot c$ kann man auch folgern: x ist eine Seite eines Rechteckes, dessen andere Seite gleich b ist, und welches einem Rechtecke mit den Seiten a und c inhaltsgleich ist. Es kann daher x auch mittelst § 37, A. 35 gefunden werden. Man sieht leicht ein, daß beide Auffassungen schließlich im Wesentlichen auf dasselbe hinausführen.

Als ein besonderer Fall des Ausdruckes $\frac{a \cdot b}{c}$ ist ein Ausdruck von der Form $\frac{a^2}{b}$ anzusehen. Derselbe bedeutet geometrisch die vierte Proportionale zu b, a und a, oder die Seite eines Rechteckes, welches gleich dem Quadrate über a und dessen andere Seite gleich b ist (A. 50), oder eine Linie x, so daß a die mittlere geometrische Proportionale zwischen b und x ist. (A. 28.)

Ist überhaupt ein Product von Linien durch ein anderes solches Product dividirt, und ist die Anzahl der linearen Factoren des Nenners um 1 kleiner als die der linearen Factoren des Zählers, so bedeutet der Quotient eine Linie, denn derselbe kann aufgefaßt werden als Product einer Linie mit mehreren unbenannten Verhältnißzahlen. Um z. B. den Ausdruck $x = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$ zu construiren, kann man zunächst $\frac{a \cdot b}{e}$ construiren, oder zu e, a und b die vierte Proportionallinie bestimmen. Bezeichnen wir diese durch p, so ist $x = \frac{p \cdot c \cdot d}{f \cdot g}$. Man construire nun in gleicher Weise etwa $\frac{p \cdot c}{f} = q$, und dann $\frac{q \cdot d}{g}$, so ist die zuletzt erhaltene Linie gleich x. Man sieht leicht ein, daß man dieses Verfahren auch durch eine Veränderung in der Reihenfolge der einzelnen Linien vielfach abändern kann, sowie daß zwei oder mehrere der Factoren einander gleich sein können, ohne daß dadurch etwas Wesentliches geändert wird. Wie construirt man z. B. die den Ausdrücken $\frac{a^3}{bc}$, $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{a^4bc}{d^2ef^2}$ entsprechenden Linien?

Hat dagegen der Zähler zwei Factoren mehr als der Nenner, so hat der Ausdruck wieder die Bedeutung einer Fläche, wie leicht einzusehen. Ist die Anzahl der Factoren des Zählers um mehr als zwei größer, als die der Factoren des Nenners, so kann der Ausdruck hier keine geometrische Deutung erhalten, ist die erstere Anzahl der letzteren gleich, so bedeutet der Ausdruck eine unbenannte Zahl; hat der Nenner mehr Factoren, als der Zähler, so ist ebenfalls eine geometrische Deutung nicht möglich.

Wie die zweite Potenz einer Linie eine Fläche bedeutet, so bedeutet umgekehrt die zweite Wurzel aus einem Quadrate a^2 die Seite dieses Quadrats, oder die Linie a. Ebenso bedeutet die zweite Wurzel aus einem Product zweier Linien, z. B. $\sqrt{a \cdot b}$, eine Linie, nämlich die mittlere Proportionale zwischen den Linien a und b, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Seite eines Quadrates, welches einem Rechtecke aus den Seiten a, b inhaltsgleich ist. Die Construction des Ausdrucks $\sqrt{ab}$ ist also in A. 29 oder A. 48 angegeben. In ähnlicher Weise finden zweite Wurzeln aus anderen Ausdrücken, welche letztere nach dem Vorhergegangenen Flächen bedeuten, eine Erklärung als Linien, so z. B $\sqrt{\frac{abc}{d}}$, $\sqrt{\frac{a^3d}{c^2}}$, u. dgl. m.

Endlich ergiebt sich aus L. 114, daß $\sqrt{a^2+b^2}$ die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Katheten gleich a und b sind, und $\sqrt{a^2-b^2}$ eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks bedeutet, dessen Hypotenuse gleich a und dessen andere Kathete gleich b ist. Ebenso lassen sich $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ und ähnliche Ausdrücke leicht als Linien geometrisch construiren.

Für $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$ construire man z. B. zunächst $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ und setze für $a^2 + b^2$ den Werth p^2 ein, so ist $x = \sqrt{p^2 + c^2 - d^2}$. Man construire nun ebenso $q = \sqrt{p^2 + c^2}$, $x = \sqrt{q^2 - d^2}$.

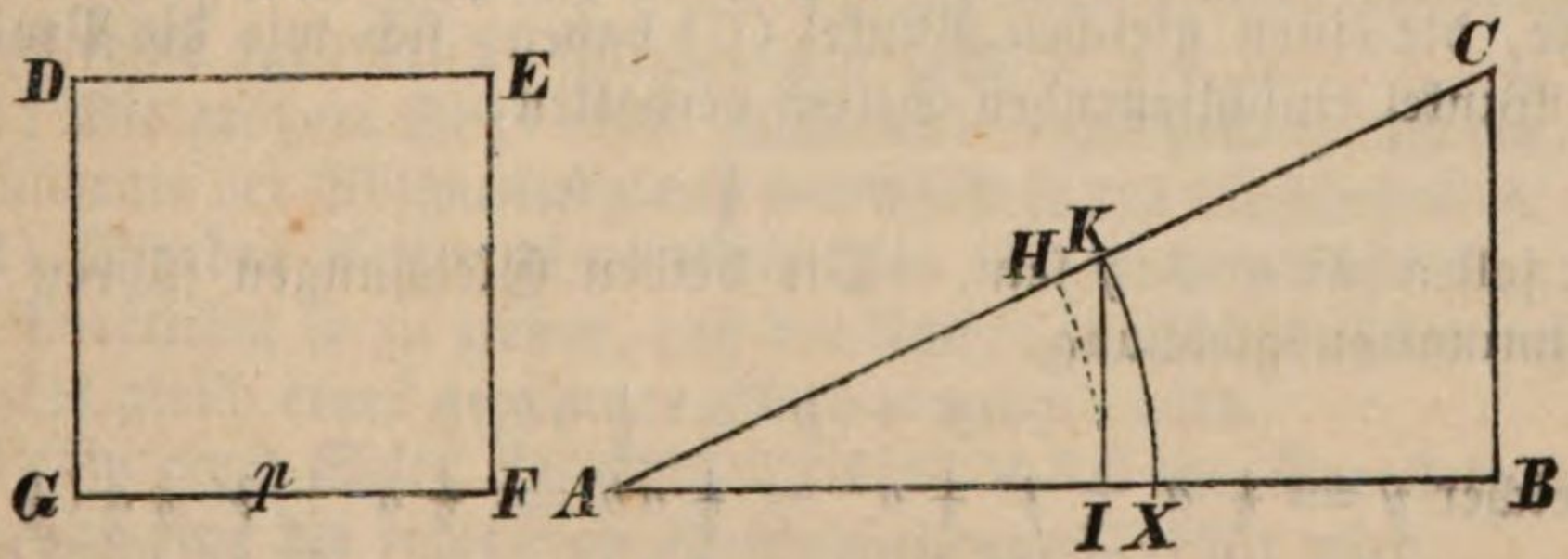
Anmerkung: $\sqrt{a^2 - b^2}$ kann auch gleich $\sqrt{(a - b)(a + b)}$ gesetzt und somit als mittlere geometrische Proportionale zwischen $a - b$ und $a + b$ construirt werden.

Endlich ist einleuchtend, daß jede Verbindung von Ausdrücken, welche nach dem Vorigen die Bedeutung von Linien erhalten, durch Addition oder Subtraction wieder eine Linie vorstellen muß. — Die genannten einfachen Ausdrücke sowie alle derartigen Verbindungen von solchen zu Summen, Differenzen oder algebraischen Summen heißen deshalb Ausdrücke von der ersten Dimension, während solche, die Flächen bedeuten, von der zweiten Dimension genannt werden.

Anmerkung: Die Begriffe Ausdrücke 3^{ter}, 4^{ter}, $\cdots n^{ter}$ Dimension können hiernach ebenfalls aufgestellt werden, jedoch ohne geometrische Deutung. Die Construction von Ausdrücken der dritten Dimension gehört in das Gebiet der Stereometrie.

Die geometrische Construction algebraischer Ausdrücke kann in vielen Fällen mit Vortheil zur Lösung von Constructionsaufgaben gebraucht werden. Man betrachte zu diesem Zweck eine oder mehrere Linien, welche entweder unmittelbar gesucht sind, oder durch welche die verlangte Figur leicht gefunden werden kann, als unbekannte Größen, suche aus den Bedingungen der Aufgabe die nöthige Anzahl von Gleichungen für dieselben, löse diese auf die Unbekannten auf und construire schließlich die für letztere gefundenen Ausdrücke geometrisch. Folgende Beispiele mögen dieses Verfahren erläutern:

1. Aufgabe: Eine Gerade AB so zu theilen, daß die Differenz der Quadrate der Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrate sei.



Analyse: Es sei p die Seite des gegebenen Quadrats $DEFG$, X der gesuchte Theilpunkt. Man setze $AB = a$, $AX = x$, so ist

$$x^2 - (a - x)^2 = p^2, \text{ daher}$$
$$x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = p^2, \text{ oder}$$
$$2ax = p^2 + a^2$$
$$x = \frac{p^2 + a^2}{2a}$$

Construction: Errichte auf AB in B eine Senkrechte BC gleich p, ziehe AC, halbire AC in H, trage auf AB von A aus eine Strecke $AI = AH$ ab, ziehe durch I die Parallele IK zu BC, welche AC in K trifft, und trage auf AB von A aus die Strecke $AX = AK$ ab, so ist X der gesuchte Theilpunkt.

Beweis: Da $IK \parallel BC$ ist, so ist $AK : AC = AI : AB$, oder, da nach Construction $AK = AX$, $AI = AH = \frac{AC}{2}$ ist, und $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ ist, $AX : \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} : AB$.

Daher ist $AX = \frac{AB^2 + BC^2}{2AB}$, $BX = AB - AX =$

$\frac{2AB^2 - AB^2 - BC^2}{2AB} = \frac{AB^2 - BC^2}{2AB}$, also $AX^2 - BX^2 =$

$(AX - BX)(AX + BX) = \frac{2BC^2}{2AB} \cdot \frac{2AB^2}{2AB} = BC^2$ oder, da $BC = p$ ist, $AX^2 - BX^2 = p^2 = DEFG$.

Discussion: Da der Ausdruck $\frac{a^2 + p^2}{2a}$ stets construirt werden kann, und nur einen einzigen Werth hat, so läßt sich die Aufgabe stets lösen. Man kann die für AX construirte Strecke auch von B aus auf AB abtragen. Ist $p = AB$, so ist $AX = a$, oder X fällt auf B und BX ist gleich Null; ist $p < AB$, so ist $AX < a$, oder X fällt zwischen A und B; ist $p > AB$, so ist $AX > a$, oder X fällt auf die Verlängerung von AB.

2. Aufgabe: In einem gegebenen Dreieck ABC zwischen den Seiten AC und BC eine Linie XY so zu ziehen, daß sie das Dreieck halbirt, und daß $CX = BY$ ist.

Analysis: Die Aufgabe kann als gelöst betrachtet werden, sobald die Längen der Abschnitte CX und CY bekannt sind. Man setze daher $CX = x$, $CY = y$ und bezeichne CA durch b, CB durch a, so ist, da Dreiecke, die einen gleichen Winkel (C) haben, sich wie die Producte der diesen Winkel einschließenden Seiten verhalten,

$$x \cdot y = \tfrac{1}{2} a \cdot b.$$

Ferner soll $x = a - y$ sein. Die beiden Gleichungen führen daher zu der Eliminationsgleichung

$$ay - y^2 = \tfrac{1}{2} ab,$$

aus welcher $y = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} ab} = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{2} a (\frac{1}{2} a - b)}$,

$x = \frac{1}{2} a \mp \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} ab} = \frac{1}{2} a \mp \sqrt{\frac{1}{2} a (\frac{1}{2} a - b)}$

folgt.

Construction: Man halbire die Seite CB in D, trage auf der Hälfte CD von C aus eine Strecke gleich CA ab und construire zu dem Reste und der Hälfte von CB die mittlere geometrische Proportionale. Man verlängere CD um die letztere und trage auch von CD eine Strecke gleich dieser Proportionalen ab. Endlich schneide man von CA eine Strecke XC gleich der eben erhaltenen Differenz und von CB eine Strecke CY gleich

der eben erhaltenen Summe ab und verbinde X mit Y, so ist die Aufgabe gelöst.

Der Beweis wird mittelst der in der Analyse benutzten Schlußfolgerungen, jedoch in umgekehrter Ordnung derselben geführt.

Discussion: Ist b größer als die Hälfte von a, so wird die Wurzelgröße imaginär und die Aufgabe ist nicht lösbar. Ist $b = \frac{1}{2}a$, so ist $x = y = \frac{1}{2}a$, die Linie XY verbindet also den Punkt A mit der Mitte von CB. Ist b kleiner als $\frac{1}{2}a$, so erhält man sowohl für CX als für CY zwei Werthe, es ist aber der zweite Werth von CX dem ersten von CY gleich und umgekehrt, d. h. man kann die vorhin für CX erhaltene Linie auch auf CB, die für CY erhaltene auf CA abtragen. Da aber die größere der Strecken CX, CY größer als $\frac{1}{2}a$ und CA kleiner als $\frac{1}{2}a$ ist, so fällt diese zweite Auflösung fort, sofern verlangt wird, daß XY ganz innerhalb des Dreiecks ABC liegen soll. — Die Länge der dritten Seite AB ist ohne Einfluß auf die Lösung der Aufgabe.

3. Aufgabe: Eine gerade Linie AB nach dem goldenen Schnitt zu theilen. Vergl. A. 30.

Analyse: Es sei $AB = a$, der größere Abschnitt $AX = x$, also der kleinere $BX = a - x$, so soll $a : x = x : (a - x)$, oder $x^2 = a(a - x)$ sein. Hieraus folgt:

$$x^2 + ax = a^2,\ x = \pm\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a.$$

Man sieht leicht ein, daß dieser Ausdruck auf dieselbe Construction führt, welche bereits in A. 30 gefunden wurde. Der Beweis ist hier so zu führen, daß man nachweist, daß die aus der Construction für AX und BX resultirenden Ausdrücke der Gleichung $AB : AX = AX : BX$ genügen. Für die Discussion beachte man, daß das negative Vorzeichen der Wurzelgröße hier zu verwerfen ist, da blos von der Länge, nicht aber von der Lage von AX die Rede ist.

Uebungsaufgaben, deren Analyse auf Gleichungen ersten Grades, oder auf reine quadratische Gleichungen führt:

1) Die größere Seite eines Rechteckes so zu theilen, daß die Differenz der Quadrate der Abschnitte gleich dem Inhalt des Rechteckes ist.

2) Mit den Seiten eines Rechteckes in gleichen Abständen von denselben Parallelen so zu ziehen, daß der Umfang des von letzteren gebildeten Rechteckes gleich einer gegebenen Linie ($= 2p$) wird.

3) Zu einer Seite BC eines Dreiecks ABC eine Parallele XY so zu ziehen, daß eine der folgenden 20 Bedingungen erfüllt wird.

1) $XY = CY$, 2) $AX = CY$, 3) $XY^2 = AX \cdot AB$, 4) $BX + CY = p$ (p ist eine gegebene Strecke), 5) $BX - CY = p$, 6) $\triangle AXY = \frac{1}{2}ABC$, 7) $\triangle AXY : ABC = m : n$, 8) $XY = BX + CY$, 9) $XY = CY - BX$, 10) $XY = AX + CY$, 11) $XY = AX - CY$, 12) $XY = AX - BX$, 13) $XY = CY - AX$, 14) $XY = BX - AX$, 15) $AX + CY = p$, 16) $CY - AX = p$, 17) $BC + XY = AX + AY$, 18) $BC - XY = AX + AY$, 19) $BC - XY = AX - AY$, 20) $BC + XY = BX + CY$.

4) Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte eine Secante in denselben zu ziehen, so daß sie durch die Peripherie halbirt wird.

5) Ein Dreieck in drei gleiche Theile zu theilen durch Linien, welche 1) einer Seite parallel sind, oder 2) auf einer Seite senkrecht stehen, oder 3) einer gegebenen Linie parallel sind.

6) In ein gegebenes Dreieck ABC über der Seite BC ein Rechteck zu zeichnen, so daß 1) eine seiner Diagonalen der Seite AB parallel ist, oder 2) die Summe zweier aneinanderstoßenden Seiten gleich einer gegebenen Linie s, oder 3) die Differenz zweier aneinanderstoßender Seiten gleich einer gegebenen Linie s ist, oder daß 4) die aneinanderstoßenden Seiten in einem gegebenen Verhältniß $m : n$ stehen.

7) In ein Quadrat fünf gleiche Kreise zu zeichnen, so daß der mittlere jeden der vier äußeren und jeder von diesen zwei aneinanderstoßende Seiten des Quadrats berührt.

Uebungsaufgaben, deren Analyse auf gemischte quadratische Gleichungen führt:

8) Eine Linie AB in einem Punkte X so zu theilen, daß eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird (p ist die Seite eines gegebenen Quadrats, b, c sind gegebene Linien, C ein auf AB gegebener Punkt):

1) $AX \cdot BX = p^2$, 2) $AX^2 = 2BX^2$, 3) $AX^2 = m \cdot BX^2$, 4) $AX^2 + BX^2 = p^2$, 5) $AX^2 = b \cdot BX$, 6) $AX \cdot BX = AX^2 - BX^2$, 7) $BX^2 = 2AC \cdot CX$, 8) $BX^2 = 2AX \cdot CX$, 9) $AC : CX = CX : BX$, 10) $AB : AX = BX : CX$, 11) $AB : AX = CX : BX$, 12) $AX^2 + CX^2 - BX^2 = AC^2$, 13) $AX^2 + BX^2 - CX^2 = AC^2$, 14) $AX^2 = BX \cdot CX$, 15) $CX^2 = AX \cdot BX$, 16) $AX^2 + b \cdot BX = c^2$, 17) $AX^2 - b \cdot BX = c^2$, 18) $AX^2 : b \cdot BX = m : n$, 19) $AX^2 = m \cdot AB \cdot BX$, 20) $AX \cdot BX = (AX - BX)^2$, 21) $AX^2 : BX^2 = m : n$.

9) Im Dreieck ABC die Linie XY parallel zu BC zu ziehen, so daß 1) $\triangle AX'Y = \triangle BCX$, oder 2) $BC : XY = AX : BX$, oder 3) $BC : XY = AX : CY$, oder 4) $AX \cdot CY = p^2$ ist.

10) In einem Dreieck ABC die Linie XY zwischen AB und AC so zu ziehen, daß die beiden Theile des Dreiecks gleichen Inhalt haben und außerdem 1) beide Theile gleichen Umfang haben, oder 2) $BX = CY$, oder 3) $AX = CY$ wird.

11) Eine Sehne AB eines gegebenen Kreises so zu verlängern, daß die von dem Endpunkt der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente 1) eine gegebene Länge hat, oder 2) gleich dem dritten Theile der ganzen Secante ist.

12) In einem Kreise ist ein Durchmesser AB gegeben und durch B ist eine Tangente an den Kreis gelegt. Man soll einen Kreis construiren, dessen Mittelpunkt auf der Peripherie des ersteren liegt, und welcher durch A geht und die Tangente berührt.

VII. Capitel.

Umfang und Inhalt des Kreises.

§ 39. Theilung von Kreislinien und Construction regelmäßiger Figuren. Berechnung des Umfangs und des Inhalts von Kreisen.

Aufgabe 60. Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Construction: Durch Halbirung des Centriwinkels. A. 17. L. 67, Zusatz 1.

Anmerkung: Die Aufgabe der Theilung eines Winkels in beliebig viele gleiche Theile durch geometrische Construction ist auf elementarem Wege nicht gelöst. Schon die Theilung in drei gleiche Theile ist nur bei dem rechten Winkel (sowie der Hälfte, dem Viertel ꝛc. eines solchen) möglich.

Aufgabe 61. Die Peripherie eines Kreises in zwei, oder vier, oder acht u. s. w., allgemein in 2^n gleiche Theile zu theilen.

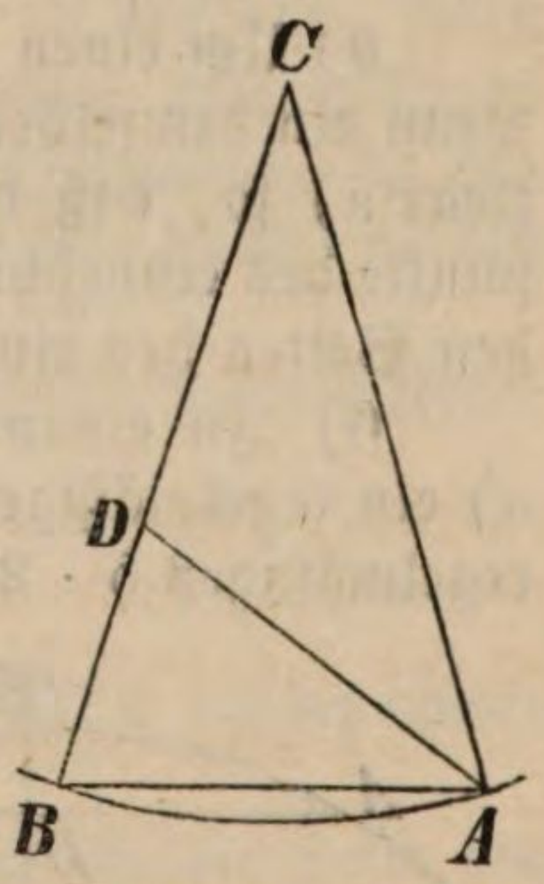
Construction: Ein Durchmesser halbirt die Peripherie, zwei zu einander senkrechte Durchmesser theilen sie in vier gleiche Theile, wiederholte Halbirungen der entstandenen Bogen in 8, 16 Theile u. s. w.

Aufgabe 62. Die Peripherie eines Kreises in drei, sechs, zwölf u. s. w., allgemein in $3 . 2^n$ gleiche Theile zu theilen.

Construction: Die Theilung in sechs Theile kann mittelst L. 77, Zus. 4, die in drei Theile durch Zusammenfassen je zweier Sechstel, oder nach A. 22. L. 22, Zus., geschehen. — A. 3.

Aufgabe 63. Die Peripherie eines Kreises in fünf, zehn, zwanzig u. s. w., allgemein in $5 . 2^n$ gleiche Theile zu theilen.

Construction: Theilt man einen Radius des Kreises nach dem goldenen Schnitt (§ 31, A. 30), und trägt den größeren Abschnitt als Sehne in den Kreis, so ist der zugehörige (kleinere) Bogen der zehnte Theil der Peripherie. Das Weitere der Constructionen ist hiernach leicht.



Beweis: Es sei C der Mittelpunkt des Kreises, CB in D nach dem goldenen Schnitt getheilt und AB gleich dem größeren Abschnitt CD in den Kreis eingetragen; man ziehe CA und AD, so ist nach Voraussetzung: $CD : CB = DB : CD$, daher auch $AB : CB = DB : AB$, und da der Winkel CBA den Dreiecken ADB und CAB gemeinsam ist, so sind nach L. 88 diese Dreiecke einander ähnlich, folglich ist, da ACB gleichschenkelig ist, auch ADB gleichschenkelig oder $AD = AB$. Daher ist auch $AD = CD$, oder ACD ein gleichschenkeliges Dreieck. Es ist folglich $\sphericalangle DCA = DAC$, $\sphericalangle DAB = DCA$, also $\sphericalangle CAB = 2\,ACB$ und $\sphericalangle CAB + CBA + BCA = 5\,BCA$, also $5 \cdot BCA = 2 \cdot R$, $BCA = \frac{2R}{5}$, d. h. $\sphericalangle BCA$ ist der zehnte Theil einer ganzen Umdrehung, mithin der Bogen AB der zehnte Theil der Peripherie.

*Aufgabe 64. Die Peripherie eines Kreises in fünfzehn gleiche Theile zu theilen.

Analyse: Der Centriwinkel des fünfzehnten Theiles der Peripherie, oder $\frac{360^0}{15}$ ist gleich dem Centriwinkel des sechsten minus dem des zehnten Theiles.

Zusatz: Hiernach ist es leicht, die Peripherie eines Kreises auch in 30, 60, ... $15 \cdot 2^n$ gleiche Theile zu theilen.

Lehrsatz 125. Theilt man die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile und verbindet je zwei benachbarte Theilpunkte durch Sehnen, so begrenzen diese ein dem Kreise einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck.

Bew. L. 64, Zus. 1. L. 72, Zus. 2.

Lehrsatz 126. Theilt man die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile und zieht durch jeden Theilpunkt an den Kreis eine Tangente, so begrenzen die Tangenten ein dem Kreise umbeschriebenes regelmäßiges n-Eck.

Bew. A. 23, Zus. L. 30.

Aufgaben 65. 1) Man beschreibe in einen gegebenen Kreis: 1) ein regelmäßiges Viereck, 2) ein regelmäßiges Sechseck, 3) ein regelmäßiges Zehneck, 4) ein regelmäßiges Fünfzehneck.

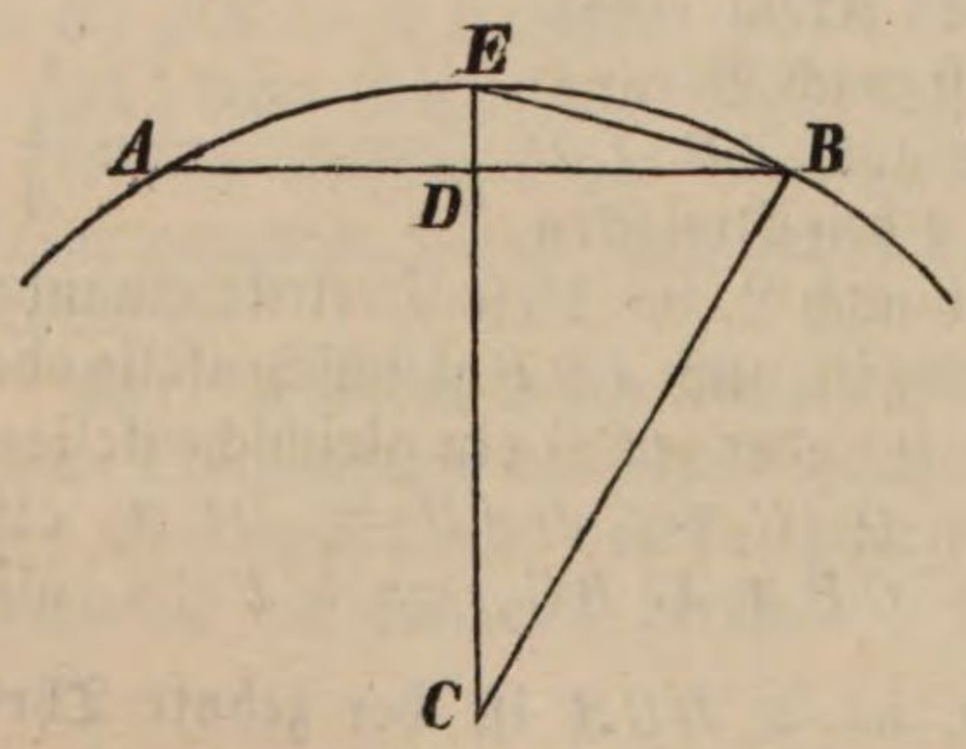
2) Man beschreibe dieselben Figuren um einen gegebenen Kreis.

3) Ein regelmäßiges $2n$-Eck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, wenn ein regelmäßiges n-Eck in demselben gegeben ist. A. 60.

4) Ein regelmäßiges n-Eck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, wenn ein demselben einbeschriebenes regelmäßiges $2n$-Eck gegeben ist.

5) Um einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges n-Eck zu beschreiben, wenn ein demselben einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck gegeben ist, und zwar a) so, daß die Seiten des umbeschriebenen Polygons durch die Eckpunkte des einbeschriebenen gehen, b) so, daß die Seiten des umbeschriebenen den Seiten des einbeschriebenen bezüglich parallel sind. A. 60.

6) In einen gegebenen Kreis und um denselben zu beschreiben: a) ein regelmäßiges $2 \cdot 2^n$ Eck, b) ein regelmäßiges $3 \cdot 2^n$ Eck, c) ein regelmäßiges $5 \cdot 2^n$ Eck, d) ein regelmäßiges $15 \cdot 2^n$ Eck.



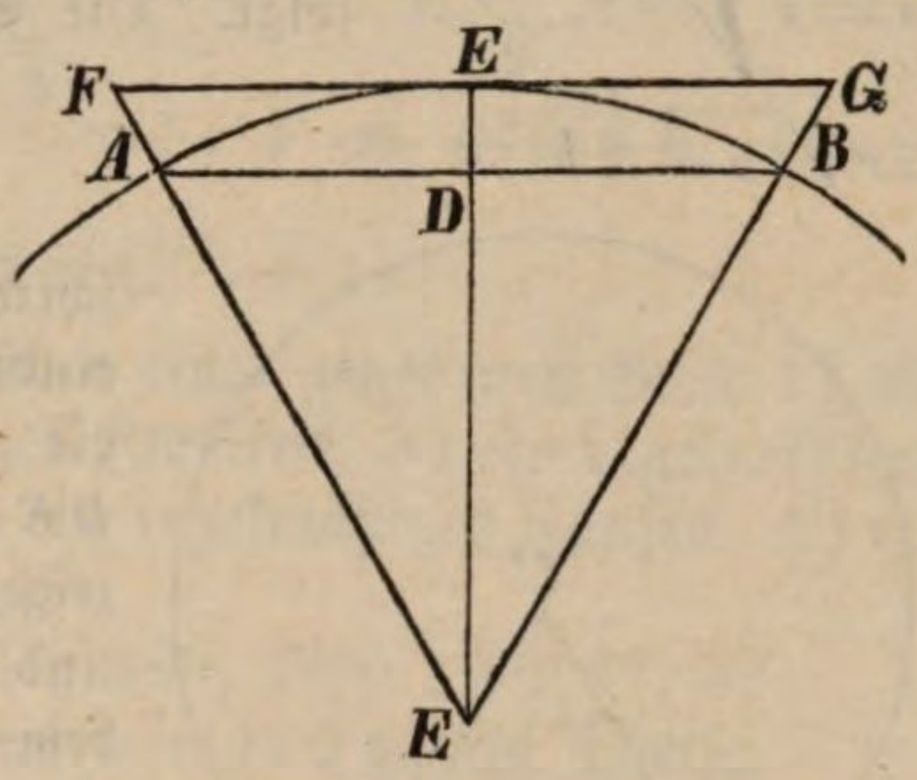
Anmerkung: Die in Aufgabe 6 genannten regelmäßigen Polygone sind die einzigen, deren Construction hier gezeigt werden kann. Außer ihnen lassen sich nach Gauß disquisitiones arithmet. noch diejenigen. deren Seitenzahl gleich $2^n + 1$ und eine Primzahl ist, auf elementarem Wege construiren.

Aufgabe 66. Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des demselben einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks die Seite x des demselben einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks zu berechnen.

Auflösung: Es sei AB die Seite s des n-Ecks, C der Mittelpunkt des Kreises, CD senkrecht auf AB und E der Durchschnittspunkt der Verlängerung von CD mit der Peripherie, so ist $EB = x$ zu berechnen. Es ist nun $EB^2 = ED^2 + DB^2$; $DB = \frac{1}{2}s$, also $DB^2 = \frac{1}{4}s^2$, $ED = EC - DC = r - DC$, $DC = \sqrt{CB^2 - DB^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$, daher $x^2 = (r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2})^2 + \frac{1}{4}s^2 = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} + r^2 - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$, also

$$x = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}}.$$

Aufgabe 67. Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des demselben einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks die Seite y des ihm umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks zu berechnen.



Auflösung: Es sei AB die Seite s des einbeschriebenen n-Ecks, C der Mittelpunkt des Kreises, CD senkrecht zu AB, E der Durchschnittspunkt der Verlängerung von CD mit der Peripherie, FG die in E den Kreis berührende Tangente und F und G ihre Durchschnittspunkte mit den Verlängerungen von CA und CB, so ist $FG = y$ zu bezeichnen. Nun ist FG parallel AB, daher $FG : AB = EC : DC$, oder $y : s = r : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$, also

$$y = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}.$$

*Aufgaben 68. Ein Kreis mit dem Radius r ist gegeben. Man berechne die Seiten folgender demselben einbeschriebenen regelmäßigen Figuren: 1) des Quadrats, 2) des Dreiecks, 3) des Zehnecks, 4) des Fünfecks, 5) des Fünfzehnecks, 6) des Achtecks, 7) des Zwölfecks, 8) des Sechzehnecks.

Man berechne ferner die Seiten der acht entsprechenden umbeschriebenen Figuren.

Auflösungen:

1) Die Seite s des einbeschriebenen Quadrats ist gleich $r\sqrt{2}$, die des umbeschriebenen Quadrats gleich $2r$.

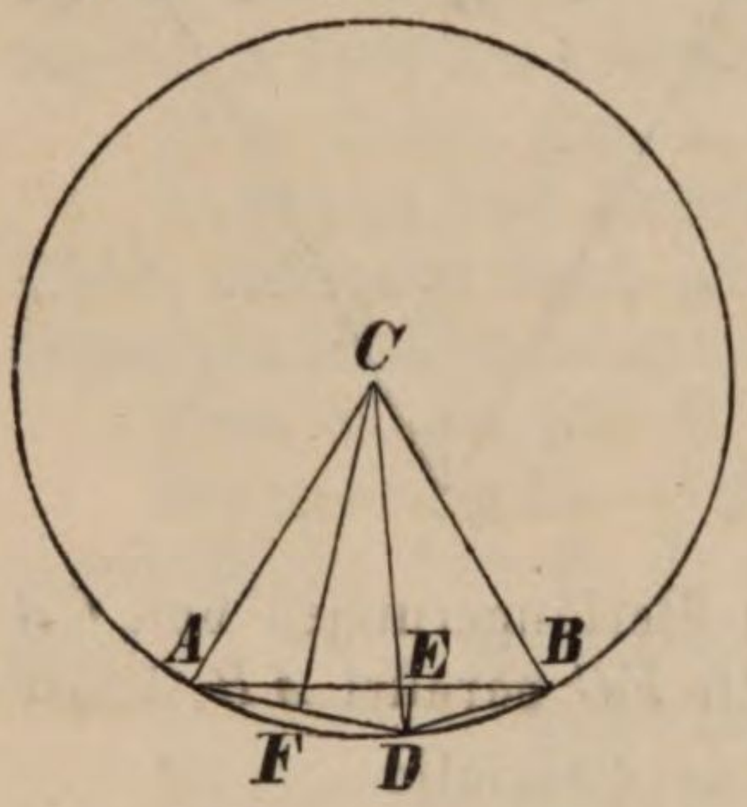
2) Aus der Seite s des einbeschriebenen Dreiecks folgt für die Seite des einbeschriebenen Sechsecks, $x = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$. Nun ist $x = r$, also $r^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s}$, woraus $s = r\sqrt{3}$ folgt. Oder: der Radius des einem gleichseitigen Dreieck umbeschriebenen Kreises ist gleich $\frac{2}{3}$ seiner Höhe, also $r = \frac{2}{3}\frac{s\sqrt{3}}{2}$, oder $s = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}$. Die Seite des umbeschriebenen Dreiecks berechnet sich hieraus (nach Aufg. 67) zu $2r\sqrt{3} = 2s$.

3) Für die Seite x des einbeschriebenen Zehnecks ist $x : r = (r - x) : x$, oder $x^2 = r^2 - rx$. Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt $x = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$,

und hieraus folgt für die Seite des umbeschriebenen Zehnecks: $y = \frac{2r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$= 2r \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$.

4) Ist s die Seite des einbeschriebenen Fünfecks, so ist die Seite des einbeschriebenen Zehnecks, oder $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$, woraus $s = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ folgt. Die Seite des umbeschriebenen Fünfecks ist gleich $2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.



5) Ist AB die Seite des dem Kreise C einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, AD die des einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks, also DB die gesuchte Seite des Fünfzehnecks, so fälle man DE senkrecht auf AB, CF senkrecht auf AD und zeige, daß $\sphericalangle EBD = 18^0$, also $\sphericalangle EBD = ACF$ und daher $\triangle BDE \backsim ACF$ ist. Nun ist nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AE$; ferner ist $AB = r$, $AD = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $AE = r - BE$ und $BE : DB = CF : AC$, oder $BE = DB \cdot \frac{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}AD^2}}{r}$. Hieraus ergiebt sich für DB, oder x, die Gleichung:

$$x^2 - 2x \cdot r \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = r^2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$ und aus dieser erhält man:

$x = \frac{r}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{18-6\sqrt{5}})$, wofür man auch durch Umformung:

$x = \frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$ erhält.

Für die Seite des umbeschriebenen Fünfzehnecks ergiebt sich hieraus:

$$y = r\sqrt{\frac{28-4\sqrt{5}-4\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}} =$$

$$\sqrt{92-40\sqrt{5}-2(7-3\sqrt{5})\sqrt{30-6\sqrt{5}}}.$$

6) Die Seiten der Achtecke sind $s = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $S = 2r(\sqrt{2}-1)$.

7) Die Seiten der Zwölfecke sind $s = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $S = 2r(2-\sqrt{3})$.

8) Die Seiten der Sechszehnecke sind

$s = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $S = 2r(\sqrt{4+2\sqrt{2}} - \sqrt{2} - 1)$.

*Aufgaben 69. Aus der Seite a eines regelmäßigen Polygons berechne man den großen Radius r, den kleinen Radius ϱ, den Inhalt I

des Polygons, und zwar 1) für das Quadrat, 2) für das Sechseck, 3) für das Dreieck, 4) für das Zehneck, 5) für das Fünfeck, 6) für das Achteck.

Resultate:

1) $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $\varrho = \frac{1}{2}a$, $I = a^2$. 2) $r = a$, $\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $I = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$. 3) $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $\varrho = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$, $I = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. 4) $r\frac{2a}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2}a\,(\sqrt{5}+1)$, $\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $I = \frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. 5) $r = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, $\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, $I = \frac{5}{4}a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. 6) $r = \frac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $\varrho = \frac{1}{2}a\,(\sqrt{2}+1)$, $I = 2a^2\,(\sqrt{2}+1)$.

*Aufgaben 70. Man construire über einer gegebenen Seite 1) ein regelmäßiges Sechseck, 2) ein regelmäßiges Zwölfeck, 3) ein regelmäßiges Achteck, 4) ein regelmäßiges Zehneck, 5) ein regelmäßiges Fünfeck, 6) ein regelmäßiges Fünfzehneck.

Man construire Winkel von 15^0, 36^0, 18^0, 24^0, 12^0, 6^0, 3^0.

Man theile die Peripherie eines Kreises in 120 gleiche Theile.

Lehrsatz 127. Der Umfang eines in einen Kreis beschriebenen Polygons ist kleiner als die Peripherie des Kreises.

Bew. L. 28, Zus.

Lehrsatz 128. Der Umfang eines um einen Kreis beschriebenen Polygons ist größer als die Peripherie des Kreises.

Bew. L. 29, Zus. 2.

Lehrsatz 129. Der Umfang eines in einen Kreis beschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks ist größer als der Umfang des in denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

Bew. L. 26.

Lehrsatz 130. Der Umfang eines um einen Kreis beschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks ist kleiner als der Umfang des um denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

Bew. L. 26.

Aufgabe 71a. Die Peripherie eines Kreises zu berechnen, dessen Radius r gegeben ist.

Auflösung: Man gehe von der Seite s_1 eines derjenigen dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecke aus, deren Berechnung im Vorhergehenden gezeigt ist, und berechne aus ihr nach A. 66 die Seite s_2 des einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks, aus dieser wieder auf gleiche Weise die Seite s_3 des $4n$-Ecks u. s. w. Durch Multiplication der einzelnen Seiten mit der zugehörigen Anzahl derselben erhält man die Umfänge u_1, u_2, u_3, ... der Polygone, also nach L. 127. 129 eine Reihe von Zahlen, welche sämmtlich kleiner sind als die gesuchte Peripherie, von denen aber jede folgende derselben näher kommt, als die vorhergehende. Man berechne ferner aus den Seiten s_1, s_2, s_3, ... nach A. 67 die Seiten

S_1, S_2, S_3, ... der umbeschriebenen regelmäßigen Polygone von bezüglich gleicher Seitenanzahl, und aus diesen Seiten dann ebenfalls die Umfänge U_1, U_2, U_3, ... der letzteren Figuren, so bilden diese Umfänge eine zweite Reihe von Zahlen, von denen jede größer als die gesuchte Peripherie ist, jede folgende aber derselben näher kommt, als die vorhergehende.

Auf diese Weise kann man die Peripherie des Kreises nach und nach zwischen immer engere Grenzen u_n, U_n; u_{n+1}, U_{n+1} u. s. w. einschließen, und so dieselbe, wenn auch nicht mit absoluter Genauigkeit, so doch näherungsweise berechnen.

Führt man dieses Verfahren beispielsweise für einen Kreis, dessen Durchmesser gleich Eins ist, also für $r = \frac{1}{2}$ aus, indem man von der Seite s_1 des regelmäßigen Sechsecks ausgeht, so erhält man die in folgender Tabelle niedergelegten Zahlen, wobei n die Anzahl der Seiten des Polygons bedeutet:

n	s	S	u	U
6	0,50000	0,57736	3,00000	3,46414
12	0,25881	0,26795	3,10582	3,21534
24	0,13052	0,13166	3,13262	3,15965
48	0,06540	0,06555	3,13934	3,14609
96	0,03271	0,03274	3,14103	3,14266
192	0,01636	0,01637	3,14144	3,14170

Da nun $u = 3{,}14144$ kleiner und $U = 3{,}14170$ größer als die Peripherie des Kreises ist, so kann diese näherungsweise gleich 3,141 gesetzt werden, wobei die Abweichung von dem absolut genauen Werthe der Peripherie kleiner als 0,001 ist.

Anmerkung: Die Zahlen der obigen Tabelle sind die abgekürzten Werthe irrationaler Zahlen, und es sind deßhalb die Werthe von s und u in der letzten Decimale absichtlich kleiner, die von S und U größer als die durch Berechnung von mehr Stellen sich ergebenden genaueren Werthe angenommen worden, um stets sicher zu bleiben, daß u kleiner und U größer als die gesuchte Peripherie ist.

Zusatz: Jeder Kreis kann als die Grenze angesehen werden, welcher sich ein demselben ein- oder umbeschriebenes regelmäßiges Polygon bei fortgesetzter Vermehrung seiner Seitenzahl ohne Ende nähert. Man pflegt dies kürzer auszudrücken, indem man sagt, ein Kreis könne als ein regelmäßiges Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden.

Alle diejenigen Sätze über regelmäßige Polygone, welche ohne Rücksicht auf die Seitenzahl derselben abgeleitet sind, gelten offenbar auch für die genannte Grenze, d. h. für den Kreis.

Hieraus folgen die Lehrsätze:

Lehrsatz 131. Alle Kreise sind ähnliche Figuren. L. 102.

Lehrsatz 132. Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie die Radien oder wie die Durchmesser derselben. L. 101.

Lehrsatz 133. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich der Hälfte des Products aus seinem Umfang und seinem Radius. L. 111.

Aufgabe 71b: Die Berechnung der Peripherie eines Kreises vereinfacht sich durch Lehrs. 132 in folgender Weise: Es sei die Peripherie p irgend eines beliebigen Kreises, dessen Radius gleich ϱ ist, bekannt, und die Peripherie P eines anderen Kreises, dessen Radius gleich r ist, gesucht, so ist

$$P : p = r : \varrho, \text{ also } P = \frac{p \cdot r}{\varrho}$$

Man hat daher nur nöthig, die in Aufgabe 71a angegebene Berechnung für irgend einen beliebigen Kreis auszuführen, und man ist übereingekommen, hierzu den dort angeführten Kreis, dessen Radius $\varrho = \frac{1}{2}$ ist, zu wählen. Die Peripherie p dieses Kreises wird durch π bezeichnet, sodaß also $\pi = 3{,}141\ldots.$ ist, und man hat daher für die Peripherie eines beliebigen anderen Kreises:

$$P = \frac{\pi \cdot r}{\frac{1}{2}}, \text{ oder } P = 2r\pi.$$

Die Zahl π bedeutet also den Umfang eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{2}$ ist, oder was dasselbe ist, das Verhältniß der Peripherie eines jeden Kreises zu seinem Durchmesser (denn $\frac{P}{2r} = \pi$).

Der Werth dieser Zahl π kann nach dem Vorigen nur näherungsweise angegeben, daher auch die Peripherie eines Kreises nicht absolut genau berechnet werden, doch kann man die Genauigkeit über jede beliebige für die Praxis erforderliche Grenze steigern.

So berechnete Ludolph von Ceulen den Umfang des einbeschriebenen und den des umbeschriebenen Polygons von 32212254720 Seiten, und fand ersteren

gleich 3,14159265358979323846,

letzteren gleich 3,14159265358979323847,

so daß also für π der auf 19 Stellen genaue Werth

$$\pi = 3{,}14159265358979323385$$

genommen werden kann. Nach dem genannten Mathematiker wird die Zahl π die Ludolph'sche Zahl genannt. Später hat man mit Hülfe bedeutend bequemerer Rechnungsmethoden, welche sich auf Lehren der höheren Mathematik stützen, die Berechnung noch weiter getrieben. Für das practische Bedürfniß reicht eine Genauigkeit von 7 Decimalen hin, so daß wir also $\pi = 3{,}1415927$ setzen können. Meist genügen sogar 5 oder noch weniger Decimalstellen, und man kann sich in vielen practischen Fällen mit Bequemlichkeit sogenannter Näherungsbrüche bedienen. Solche sind z. B. $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$, welcher Werth von dem wahren um weniger als 0,0013, und $\frac{355}{113}$, welcher erst in der siebenten Decimale von dem wahren Werthe abweicht. Der erstere dieser Näherungswerthe wird der Archimedische genannt (Archimedes, gest. 512 v. Chr., berechnete den Umfang eines ein- und eines umbeschriebenen 96-Ecks, und fand, daß die Peripherie des Kreises weniger als $3\frac{1}{7}$ und mehr als $3\frac{10}{71}$ des Durchmessers betrage), der letztere rührt von Peter Metius (1550) her.

Lehrsatz 134. Der Flächeninhalt eines Kreises ist nun nach Lehrs. 133 gleich

$$\frac{1}{2}P \cdot r, \text{ oder } I = r^2\pi.$$

Anmerkung: Die im Vorstehenden angegebene Methode der Berechnung der Zahl π läßt sich mit Hülfe anderweitiger Sätze über die ein- und umbeschriebenen Polygone noch bedeutend vereinfachen. Man kann auch zunächst den Flächeninhalt des Kreises suchen, indem man ihn mit den Flächeninhalten der ein- und umbeschriebenen Polygone vergleicht, u. dgl. m. Alle derartigen weitern Entwicklungen können hier übergangen werden, da zu der wirklichen Ausführung der Rechnung kein Bedürfniß vorliegt. Die Aufgabe, den Flächeninhalt eines Kreises zu finden, ist bekannt unter dem Namen der Quadratur des Zirkels.

Sie ist dem Wesen nach identisch mit der Aufgabe, einen Kreis durch Construction in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln, und kann mit absoluter Genauigkeit nicht gelöst werden.

Aufgaben zu § 39:

1) Aus der Peripherie P eines Kreises den Radius r und den Inhalt I zu berechnen. A. 71 b. L. 134. 2) Aus dem Inhalt I eines Kreises den Radius r und die Peripherie zu berechnen. 3) Den Inhalt eines von zwei concentrischen Kreislinien begrenzten Ringes aus den Radien zu berechnen.

4) Einen Kreis zu construiren, der a) gleich der Summe zweier gegebener Kreise, b) gleich der Summe dreier oder mehr gegebener Kreise, c) gleich der Differenz zweier Kreise, d) doppelt so groß als ein gegebener Kreis, e) dreimal oder $n$mal so groß als ein gegebener Kreis, f) halb so groß als ein gegebener Kreis ist. L. 114. 122. 131. 5) Einen gegebenen Kreis durch eine $(n-1)$ concentrische Kreislinie in zwei (n) gleiche Theile zu theilen. 6) In ein gleichseitiges Dreieck sei ein Kreis beschrieben, sodann in jeden der drei Zwischenräume zwischen diesem Kreis und zwei Seiten ein diese Seiten und den Kreis berührender Kreis, sodann in jeden Zwischenraum zwischen einem der letzteren Kreise und den zugehörigen Seiten in gleicher Weise wieder ein Kreis construirt, u. s. f. bis in's Unendliche. Man berechne a) die Summe der Umfänge, b) die Summe der Flächeninhalte sämmtlicher Kreise. L. 83, Zus. 2. A. 69, 3. Arithm. § 39.

§ 40. Berechnung von Bogen, Sectoren und Segmenten.

Lehrsatz 135. Bogen desselben Kreises (oder gleicher Kreise) verhalten sich wie ihre Centriwinkel.

Beweis: Theile die Centriwinkel durch ein gemeinschaftliches Maß. L. 64.

Zusatz: Daher verhält sich auch jeder Bogen eines Kreises zur ganzen Peripherie, wie sein Centriwinkel zu 360^0.

Erklärung und Zusatz: Theilt man die Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, so heißt jeder Theil ein Bogengrad. Jeder Bogengrad wird in 60 (Bogen-) Minuten, jede Minute in 60 (Bogen-) Secunden getheilt.

Jeder Bogen eines Kreises hat so viele Bogen-Grade, Minuten oder Secunden, als sein Centriwinkel Winkel-Grade, Minuten oder Secunden hat.

Anwendung dieses Satzes auf Winkelinstrumente, bei welchen die Winkel durch die Anzahl der Grade u. s. w. eines eingetheilten Kreises oder Kreisbogens

gemessen werden. Transporteur — Astrolabium, Theodolit, Sextant, Universalinstrument.

Aufgabe 72: Die Länge eines Bogens b aus dem Radius r und dem Centriwinkel α (oder der Anzahl der Bogengrade ꝛc.) zu bestimmen.

Auflösung: Da $b : 2r\pi = \alpha : 360^0$, so ist

$$b = \frac{\alpha \cdot 2r\pi}{360^0} = \alpha \cdot r \cdot \frac{\pi}{180^0}.$$

Anmerkung: Der Werth des Quotienten $\frac{180^0}{\pi}$ wird kürzer durch ϱ bezeichnet. Es ist also $\varrho = 57^0\ 17'\ 44,''8 \ldots = 3437,'75 = 206264,''8$, und $b = \frac{\alpha \cdot r}{\varrho}$.

Aufgabe 73: Den Centriwinkel α (die Anzahl der Bogengrade u. s. w.) aus dem Radius r und der Länge b des Bogens zu berechnen.

Auflösung: $\alpha = \frac{b \cdot 180^0}{r\pi} = \frac{b \cdot \varrho}{r}$.

Lehrsatz 136. Die Flächeninhalte zweier Sectoren desselben Kreises (oder gleicher Kreise) verhalten sich wie ihre Centriwinkel, oder wie ihre Bogen.

Beweis durch Theilung der Centriwinkel mittelst eines gemeinschaftlichen Maßes, L. 64.

Zusatz: Daher verhält sich auch jeder Sector zur Fläche des ganzen Kreises, wie sein Centriwinkel zu 360^0 oder wie sein Bogen zur Peripherie.

Aufgabe 74: Den Flächeninhalt F eines Sectors zu berechnen, wenn der Radius r und a) sein Centriwinkel, oder b) sein Bogen gegeben ist.

Auflösung: Aus $F : r^2\pi = \alpha : 360^0 = b : 2r\pi$ folgt

$$\text{a) } F = \frac{\alpha \cdot r^2\pi}{360^0} = \frac{\alpha r^2}{2\varrho};\ \text{b) } F = \frac{br}{2}.$$

Zusatz: Jeder Sector ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich seinem Bogen und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

Aufgabe 75: Den Flächeninhalt eines Segmentes zu berechnen.

Auflösung: Man ziehe die Radien nach den Endpunkten des Bogens, berechne die Flächen des hierdurch entstandenen Sectors und Dreiecks und subtrahire letztere von ersterer.

Aufgaben zu § 40:

1) Aus dem Centriwinkel α und dem Flächeninhalt F eines Sectors den Radius r zu berechnen. 2) Ebenso r aus F und dem Bogen b. 3) Ebenso α aus F und r, und 4) b aus F und r.

5) Berechne den Inhalt des kleineren Segmentes eines Kreises, dessen Sehne eine Seite des demselben einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist, a) für $n = 4$, b) für $n = 6$. A. 68.

6) Ueber der Hypotenuse eines gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreiecks als Durchmesser ist nach außen ein Halbkreis, sowie über derselben als Sehne aus dem Scheitel des rechten Winkels ein Quadrant beschrieben. Man berechne Umfang

und Inhalt der von den beiden Bogen eingeschlossenen sichelförmigen Figur (lunula) aus der Kathete des Dreiecks.

7) Ueber jeder Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks ist ein Halbkreis beschrieben, so daß der über der Hypotenuse construirte das Dreieck einschließt, die anderen beiden nach außen liegen. Man berechne die Summe der Umfänge und die der Flächeninhalte der beiden entstandenen sichelförmigen Figuren aus den gegebenen Katheten.

8) Ueber jeder Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei aus dem gegenüberliegenden Eckpunkt als Mittelpunkt ein Kreisbogen beschrieben. Man berechne den Umfang und den Inhalt der von den drei Bogen eingeschlossenen krummlinigen Figur aus der Seite des Dreiecks. $a = 13;\ 0{,}7;\ 5\frac{7}{8}$.

9) Den Umfang und den Flächeninhalt des zwei Kreisen gemeinschaftlichen Stückes zu berechnen, wenn der Mittelpunkt eines jeden derselben auf der Peripherie des anderen liegt. $r = 25;\ 1{,}5;\ 2\frac{3}{4}$.

10) Um jeden Eckpunkt eines regelmäßigen Sechseckes ist mit der Seite als Radius ein Kreis beschrieben. Es entsteht eine strahlenförmige krummlinige Figur. Man berechne ihren Umfang und Inhalt aus dem Radius r. — $r = 3{,}25;\ 17\frac{1}{3};\ 0{,}02$.

11) Den Flächeninhalt desjenigen Stückes eines Kreises zu berechnen, welches zwischen einem Durchmesser und einer demselben parallelen Sehne liegt, wenn die Hälfte der Sehne gleich ihrem Abstand von dem Mittelpunkt ist. Gegeben sei der Radius r des Kreises. $r = 4;\ 0{,}56;\ 0{,}08$.

12) Drei gleich große Kreise berühren sich gegenseitig von außen. Man soll den Umfang und den Flächeninhalt der zwischen ihren Peripherien liegenden krummlinigen dreiseitigen Figur aus dem Radius r berechnen. $r = 123;\ 0{,}032;\ 22\frac{3}{4}$.

13) Den Inhalt eines Segmentes, welches von einer Seite eines gleichseitigen Dreiecks und einem Bogen des umbeschriebenen Kreises begrenzt wird, aus der Seite a des Dreiecks zu berechnen. $a = 6;\ 0{,}42;\ 13\frac{1}{5}$.

14) Den Inhalt einer von zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und dem zwischen denselben liegenden kleineren Bogen des einbeschriebenen Kreises begrenzten Figur aus der Seite a des Dreiecks zu berechnen. $a = 0{,}6;\ 5{,}4;\ 6\frac{3}{5}$.

15) Ein Kreis berühre die beiden Radien und den Bogen eines Quadranten. Man berechne aus dem Radius r des letzteren die Flächeninhalte der zwischen dem einbeschriebenen Kreis und dem Umfang des Quadranten liegenden Figuren. $r = 48;\ 0{,}36;\ \frac{1}{25}\frac{8}{}$.

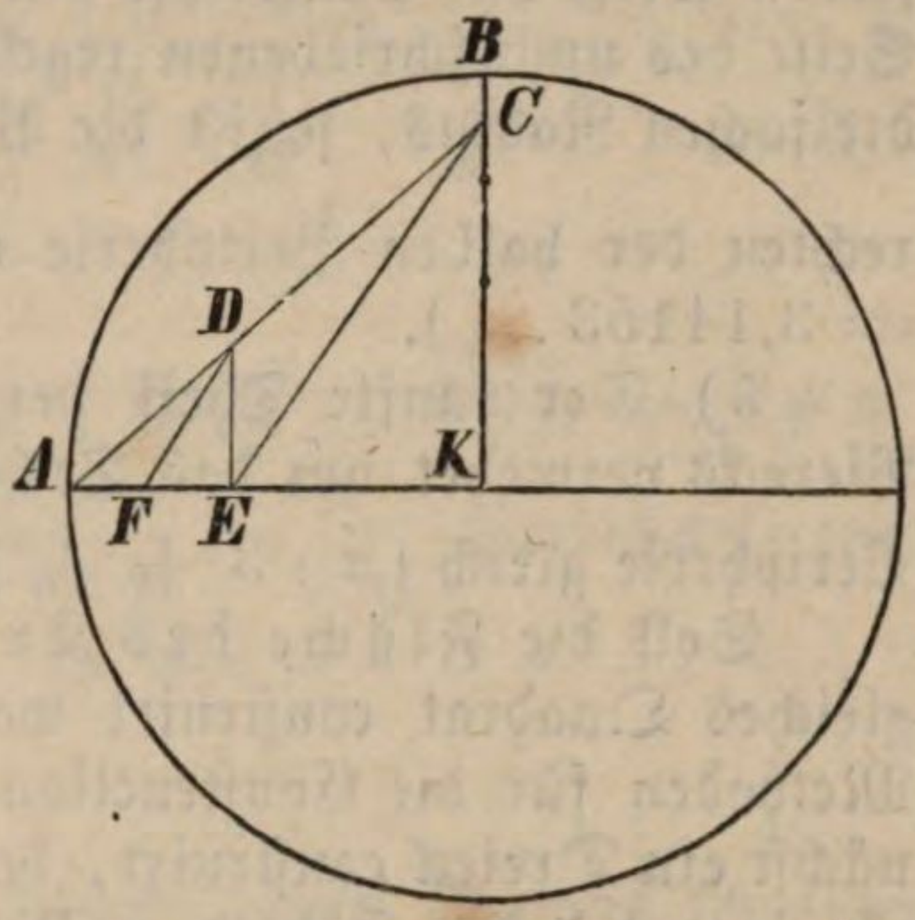
Anhang 7. Rectification und Quadratur des Kreises durch geometrische Construction.

Die Aufgabe, die Peripherie eines Kreises durch geometrische Construction zu finden, d. h. eine gerade Linie zu zeichnen, welche der Peripherie gleich ist, kann (nach § 39, A. 71 b) mit absoluter Genauigkeit nicht gelöst werden. Das Gleiche gilt von der geometrischen Quadratur des Kreises, d. h. von der Aufgabe, die Seite eines Quadrates zu finden, dessen Flächeninhalt dem eines gegebenen Kreises gleich ist. Anders verhält es sich, wenn man sich mit einer *näherungsweisen* Construction begnügen will, bei welcher also die construirte Linie von der genauen um einen Fehler

verschieden ist, welcher eine gegebene, beziehungsweise im einzelnen practischen Falle gestattete, Grenze nicht überschreitet.

Man kann zu diesem Zwecke Näherungswerthe der Zahl π benutzen, welche man aus den bekannten Stellen derselben ableitet. So ergiebt sich z. B. aus dem in § 39 erwähnten, auf 6 Decimalstellen genauen Näherungswerth $\frac{355}{113}$ für das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser folgende näherungsweise richtige Construction der Peripherie:

Es ist $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$, also die Hälfte der Peripherie, oder $r\pi$ näherungsweise gleich $3r + \frac{16}{113} r$. Zieht man nun im Kreise K zwei zu einander senkrechte Radien KA, KB, theilt KB in acht gleiche Theile, verbindet den B zunächst liegenden Theilpunkt C mit A, trägt auf AC von A aus die Strecke AD gleich der Hälfte des Radius ab, fällt von D die Senkrechte DE auf KA, zieht CE und dann DF parallel CE, welche Linie KA in F schneide, so ist $AF : AE = AD : AC$, oder $AF = \frac{AE \cdot AD}{AC}$ und



$AE : AK = AD : AC$, oder $AE = r \cdot \frac{AD}{AC}$, also $AF = r \cdot \frac{AD^2}{AC^2}$

$= \frac{r \cdot \frac{1}{4} r^2}{r^2 + \frac{49}{64} r^2} = \frac{16}{113} r$, also ist die halbe Peripherie gleich dem dreifachen Radius plus AF, und der Fehler beträgt weniger als 0,000001 des Durchmessers (wenn die Construction selbst mit entsprechender Genauigkeit ausgeführt werden könnte). Noch andere näherungsweise Constructionen sind z. B. folgende:

1) Man ziehe im Kreise K einen Durchmesser AB, errichte in B auf AB eine Senkrechte und trage auf ihr von B aus nach der einen Richtung BC gleich der Hälfte des Radius, nach der anderen BD gleich dem sechsfachen Radius und weiter von D aus DE gleich dem Radius ab, errichte auf BC in C eine Senkrechte CF gleich dem Durchmesser, verbinde F mit E und schließlich den Durchschnittspunkt G der Linie FE und des Durchmessers AB mit D, so ist GD gleich der Peripherie.

Welches ist hier die Fehlergrenze? — Man findet $GD = 2r \cdot \frac{\sqrt{2221}}{15}$, also statt π : 3,1418 . . .

2) Man ziehe im Kreise K einen Durchmesser AB, verlängere denselben über B hinaus und trage auf der Verlängerung BC gleich dem fünften Theile und CD gleich $\frac{2}{5}$ des Radius ab, errichte in A auf AB die Senkrechte AE gleich dem Radius, ziehe CE, verlängere AE über E und mache $AF = CE$, ziehe endlich FG parallel zu DE, so ist AG näherungsweise gleich der Peripherie.

Man findet nämlich für π : $0{,}26\sqrt{146} = 3{,}1415919 \ldots$

3) Man construire eine Seite des dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Achtecks, zeichne ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen eine Kathete gleich der Hälfte dieser Seite und dessen andere Kathete ein Radius ist und verlängere die Hypotenuse dieses Dreiecks um die Hälfte des Radius, so ist die erhaltene Summe beider Linien dem vierten Theile der Peripherie näherungsweise gleich ($\pi : 3{,}14144\ldots$).

4) Errichte auf einem Durchmesser in seinen Endpunkten nach derselben Seite hin Senkrechte und mache die eine derselben gleich der halben Seite des umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, die andere gleich dem dreifachen Radius, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte der Senkrechten der halben Peripherie näherungsweise gleich ($\pi : \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}} = 3{,}14153\ldots$).

5) Der fünfte Theil der Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Vierecks vermehrt um das Sechsfache des Radius ist näherungsweise der Peripherie gleich ($\pi : 3 + \frac{1}{10}\sqrt{2} = 3{,}14142\ldots$).

Soll die Fläche des Kreises durch ein näherungsweise derselben gleiches Quadrat construirt werden, so kann man sich der angegebenen Methoden für die Construction der Peripherie bedienen, indem man zunächst ein Dreieck construirt, dessen Grundlinie näherungsweise der Peripherie und dessen Höhe dem Radius gleich ist, und dieses in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandelt. Eine einfache unmittelbare Construction der Seite eines solchen Quadrates ist unter Anderen die folgende:

Man ziehe einen Durchmesser AB, theile den Radius MA in D im Verhältniß $AD : MD = 2 : 3$, halbire den Radius MB in E, verlängere MB über B um $BC = BE$, beschreibe über DE und AC als Durchmesser nach entgegengesetzten Seiten Halbkreise und ziehe durch M eine Senkrechte, welche von dem Bogen des einen Halbkreises in G, von dem des anderen in H geschnitten wird, so ist GH näherungsweise die Seite des dem Kreise inhaltsgleichen Quadrates. (Es ist $GH = r\,(\sqrt{\frac{3}{10}} + \sqrt{\frac{3}{2}})$, der Unterschied beider Flächen kleiner als $0{,}00005\ r^2$.)

Anhänge zum I.—VII. Capitel.

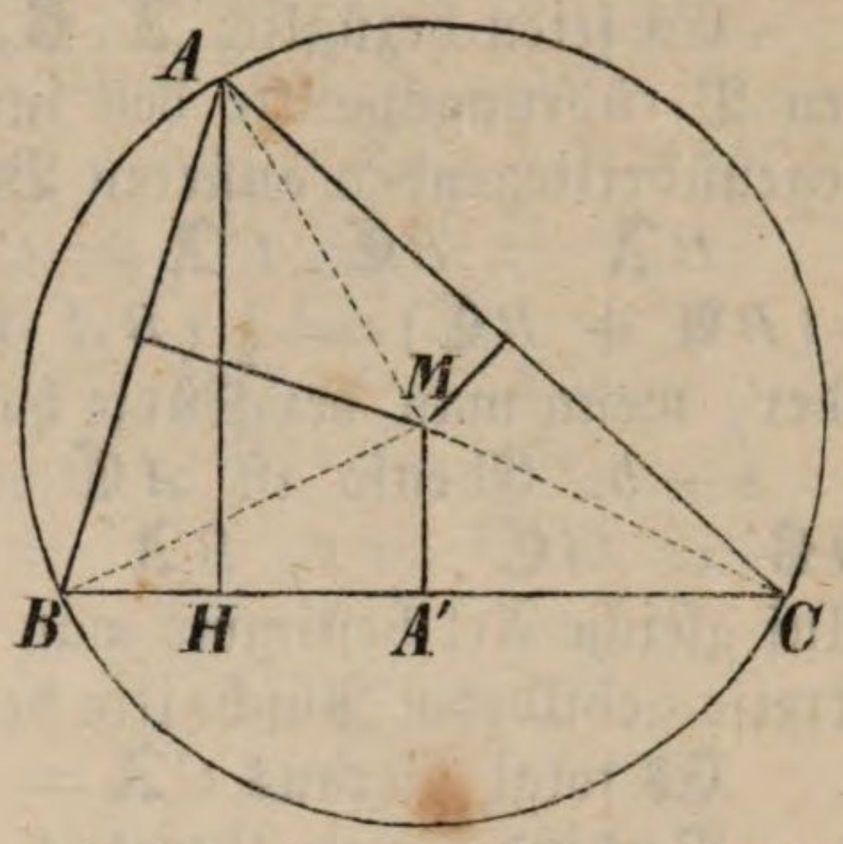
Anhang 8.

Sätze über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

1) Die drei geraden Linien, welche auf den Seiten eines Dreiecks in ihren Halbirungspunkten senkrecht stehen (die Mittelsenkrechten), schneiden sich in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt ist von allen Eckpunkten des Dreiecks gleichweit entfernt, daher Mittelpunkt des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises. Vergl. L. 67, Zus. 6 und § 24. Im Folgenden soll dieser Punkt durch M, der Radius des umbeschriebenen Kreises durch r, der Abstand des Punktes M von der Seite $BC = a$ durch p_a, sein Abstand von der Seite $AC = b$ durch p_b und sein Abstand von $AB = c$ durch p_c bezeichnet werden.

Zusätze: Der Punkt M liegt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks, je nachdem dasselbe spitz- oder stumpfwinkelig ist. Im rechtwinkeligen

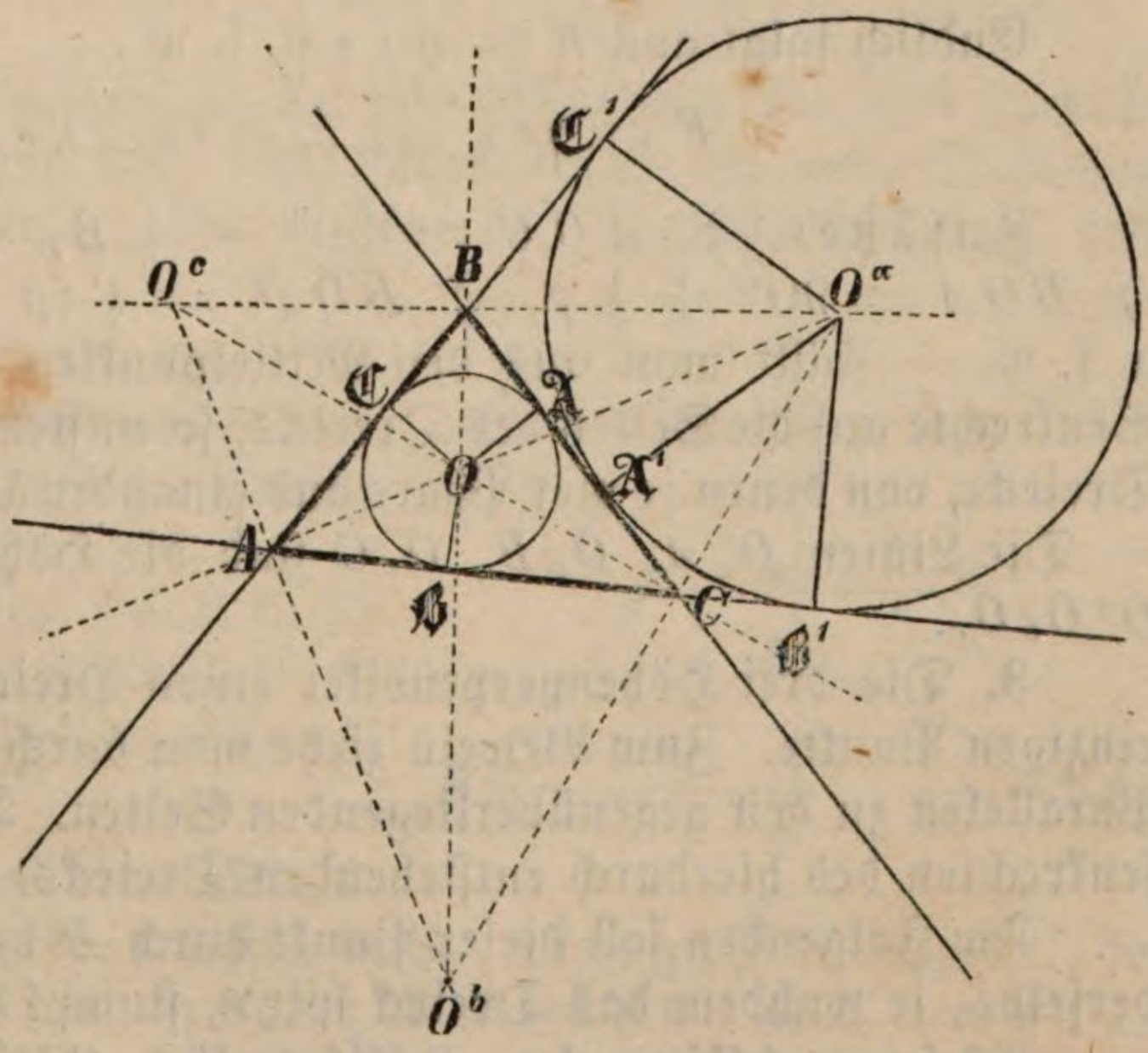
Dreieck liegt er in der Mitte der Hypotenuse. — Die kleinste Mittelsenkrechte steht auf der größten Seite und umgekehrt.



Bezeichnet man die Winkel BAC, CBA, ACB bezüglich durch α, β, γ und die Fußpunkte von p_a, p_b, p_c bezüglich durch A', B', C', so ist $\sphericalangle BMC = 2\alpha$, $CMA = 2\beta$, $AMB = 2\gamma$, $\sphericalangle BMA' = CMA' = \alpha$ u. s. w. Es ist ferner $\sphericalangle MBA' = MCA' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$, $\sphericalangle MBC' = MAC' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma$, $\sphericalangle MAB' = MCB' = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)$ und $\sphericalangle MBA' + MAC' + MCB' = MCA' + MBC' + MAB' = 90^0$.

Zieht man noch eine Höhe $AH = h$, so ist $\triangle ABH \backsim AMB'$, daher $c : h_a = r : \frac{1}{2}b$, oder $r = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c}$. Bezeichnet ferner F den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, ist also $F = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}ch_c$, so ist $r = \frac{abc}{4F}$.

2) Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem einzigen Punkt. Dieser Punkt ist von allen Seiten des Dreiecks gleichweit entfernt, daher Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises. Vergl. L. 36 u. § 24. Ebenso schneiden sich die Halbirungslinien je zweier Außenwinkel des Dreiecks mit der Halbirungslinie des an dem dritten Eckpunkt liegenden inneren Winkels in einem einzigen Punkte und jeder dieser Punkte ist von den Seiten des Dreiecks (oder deren Verlängerungen) gleich weit entfernt, daher Mittelpunkt eines diese Seiten berührenden Kreises.



Von den vier Berührungskreisen des Dreiecks liegt der erste innerhalb desselben und berührt die Seiten zwischen ihren Endpunkten, die drei anderen Kreise liegen außerhalb des Dreiecks und jeder von ihnen berührt die dem zugehörigen halbirten inneren Winkel gegenüberliegende Seite zwischen ihren Endpunkten, die beiden anderen auf ihren Verlängerungen.

Im Folgenden bedeute O den Mittelpunkt des inneren, O_a, O_b, O_c bezüglich die Mittelpunkte der die Seiten BC, AC,

AB zwischen ihren Endpunkten berührenden äußeren Kreise und ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c bezüglich die Radien derselben.

Es seien bezüglich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die auf den Seiten BC, AC, AB liegenden Berührungspunkte des inneren, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die des der Seite BC gegenüberliegenden äußeren Berührungskreises, so ist

$B\mathfrak{A} = B\mathfrak{C}$, $C\mathfrak{A} = C\mathfrak{B}$, $A\mathfrak{B} = A\mathfrak{C}$, daher $B\mathfrak{A} = B\mathfrak{C} = \frac{1}{2}(B\mathfrak{A} + B\mathfrak{C}) = \frac{1}{2}(BA + BC - A\mathfrak{B} - C\mathfrak{B}) = \frac{1}{2}(c + a - b)$, oder, wenn man der Kürze halber $a + b + c = 2s$ setzt, $B\mathfrak{A} = B\mathfrak{C} = s - b$. Ebenso ist $A\mathfrak{C} = A\mathfrak{B} = s - a$, $C\mathfrak{A} = C\mathfrak{B} = s - c$, $A\mathfrak{B}' = A\mathfrak{C}' = s$, $B\mathfrak{A}' = B\mathfrak{C}' = s - c$, $C\mathfrak{A}' = C\mathfrak{B}' = s - b$. Auf gleiche Art bestimme man die durch die Berührungspunkte der übrigen Kreise gebildeten Abschnitte der Seiten.

Es folgt hieraus $C\mathfrak{A} = B\mathfrak{A}'$, $C\mathfrak{A}' = B\mathfrak{A}$ u. s. w. In Worten?

Verbindet man O mit A, B, C, so erhält man: $\triangle ABC = ABO + ACO + BCO$, oder $F = \frac{1}{2}\varrho(a + b + c) = \varrho s$. Ebenso ist $F = ABO_a + ACO_a - BCO_a = \varrho_a(s - a)$, allgemein: $\varrho . s = \varrho_a(s - a) = \varrho_b(s - b) = \varrho_c(s - c) = F$, oder $\varrho : \varrho_a = (s - a) : s$, u. s. w.

Zieht man $O\mathfrak{B}$ und $O_a\mathfrak{B}'$, so ist $O\mathfrak{B} : O_a\mathfrak{B}' = A\mathfrak{B} : A\mathfrak{B}'$, oder $\varrho : \varrho_a = (s - a) : s$, wie vorher.

Ferner ist $\triangle OC\mathfrak{B} \backsim O_aC\mathfrak{B}'$, daher $\varrho : (s - c) = (s - b) : \varrho_a$ oder $\varrho . \varrho_a = (s - b) \cdot (s - c)$. Ebenso ist $\varrho . \varrho_b = (s - a) . (s - c)$, u. s. w.

Aus $\varrho . s = \varrho_a \cdot (s - a)$ und $\varrho . \varrho_a = (s - b) . (s - c)$ erhält man durch Elimination:

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \quad \varrho_a = \sqrt{\frac{s.(s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

In ähnlicher Weise bestimme man ϱ_b und ϱ_c.

Endlich folgt aus $F = \varrho \cdot s$ u. s. w.,

$$F = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Zusätze: $\sphericalangle AOC = 90^0 + \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle COB = 90^0 + \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle BOA = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$, $\sphericalangle BO_aC = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $\sphericalangle BO_aA = \frac{1}{2}\gamma$, u. s. w. — Fällt man aus den Mittelpunkten der vier Berührungskreise Senkrechte auf die Seiten des Dreiecks, so entstehen zwölf Paare congruenter Dreiecke, von denen je vier Paare aus einander ähnlichen Dreiecken bestehen. — Die Linien O_aA, O_bB, O_cC sind die Höhenperpendikel des Dreiecks $O^aO_bO_c$.

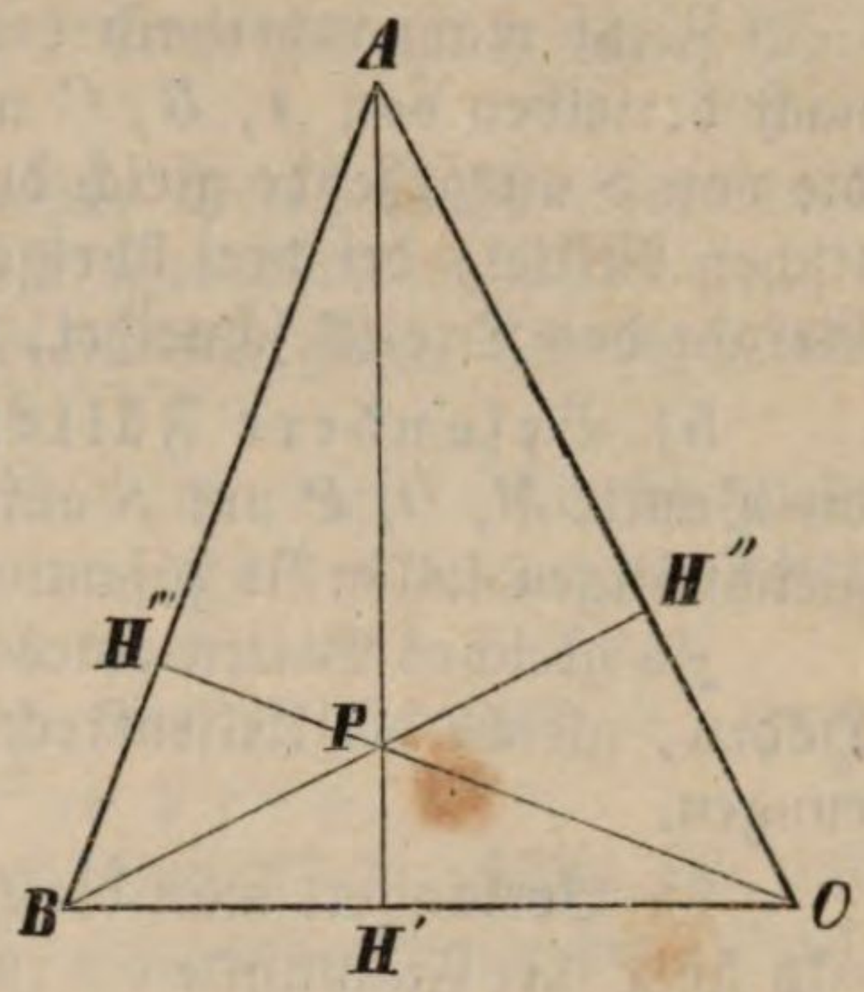
3. Die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks schneiden sich in einem einzigen Punkte. Zum Beweis ziehe man durch die Eckpunkte des Dreiecks Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten. Die Höhen sind die Mittelsenkrechten des hierdurch entstehenden Dreiecks.

Im Folgenden soll dieser Punkt durch P bezeichnet werden. Wo liegt derselbe, je nachdem das Dreieck spitz-, stumpf-, oder rechtwinkelig ist?

Es seien $AH' = h_a$, $BH'' = h_b$, $CH''' = h_c$ die Höhenperpendikel, so ist 1) $\triangle ABH' \backsim CBH''' \backsim APH''' \backsim CPH'$. 2) $\triangle$

$BAH'' \backsim CAH''' \backsim CPH'' \backsim BPH'''$. 3) $\triangle BCH'' \backsim ACH' \backsim APH'' \backsim BPH'$.

Beschreibt man über einer Seite eines Dreiecks als Durchmesser einen Halbkreis, so geht derselbe durch die Fußpunkte der zu den anderen Seiten senkrechten Höhen.



Die unteren (d. h. den Seiten anliegenden) Abschnitte der Höhen theilen das ursprüngliche Dreieck in drei Kreisvierecke.

Es ist $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c (= 2F)$, oder die Rechtecke aus je einer Seite und der zugehörigen Höhe sind gleich.

Je zwei Seiten des Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie ihre dem gemeinschaftlichen Eckpunkt anliegenden Abschnitte.

Die Rechtecke aus den beiden Abschnitten je einer Höhe sind gleich.

Das Rechteck aus je einer Seite und einem ihrer Abschnitte ist gleich dem Rechteck aus dem mit diesem Abschnitt zusammenstoßenden Höhenperpendikel einer anderen Seite und dessen oberem Abschnitt.

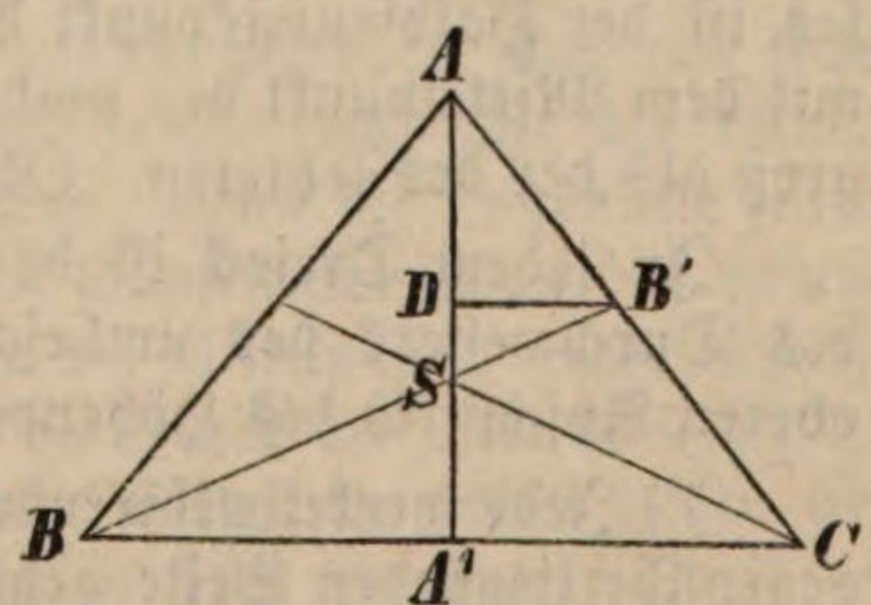
Das Rechteck aus den beiden Abschnitten einer Seite ist gleich dem Rechteck aus der zugehörigen Höhe und ihrem unteren Abschnitt.

Das Quadrat einer Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten plus oder minus dem doppelten Rechteck aus der zugehörigen Höhe und ihrem oberen Abschnitt. Vergl. L. 115. 116.

Verbindet man die Fußpunkte zweier Höhenperpendikel mit einander, so ist das durch die Verbindungslinie abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

Das durch die Verbindungslinien der Fußpunkte der drei Höhenperpendikel begrenzte Dreieck wird das Höhendreieck des ursprünglichen genannt. Die drei Höhenperpendikel sind die Winkelhalbirenden des Höhendreiecks.

4. Die drei von den Eckpunkten eines Dreiecks nach den Halbirungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gehenden Transversalen (Mittellinien) schneiden sich in einem einzigen Punkt. Dieser Punkt theilt jede der Transversalen im Verhältniß 1 : 2, so daß der größere Abschnitt dem Eckpunkt anliegt.



Beweis: Es sei AA' eine Mittellinie, eine zweite BB' schneide dieselbe in S. Man ziehe $B'D \parallel BC$, so ist $BS : B'S = BA' : B'D = CA' : B'D = AC : AB' = 2 : 1$. Man zeige in ähnlicher Weise, daß BB' von der dritten Mittellinie in demselben Verhältniß getheilt wird.

Der Durchschnittspunkt der Mittellinien heißt der Schwerpunkt des Dreiecks. Derselbe soll durch S bezeichnet werden.

Zieht man außerhalb des Dreiecks ABC eine beliebige Gerade und nach derselben von A, B, C und S aus unter sich parallele Linien, so ist die von S ausgehende gleich dem dritten Theile der Summe (dem arithmetischen Mittel) der drei übrigen. Wie gestaltet sich dieser Satz, wenn die Gerade das Dreieck schneidet, wie, wenn sie durch S geht?

5) Besondere Fälle: In einem gleichschenkeligen Dreieck liegen die Punkte M, O, P und S auf einer Geraden, nämlich der Höhe; in einem gleichseitigen fallen sie zusammen.

Zu gleichen Seiten eines Dreiecks gehören gleiche Mittellinien, gleiche Höhen, gleiche Mittelsenkrechten und gleiche Winkelhalbirende. Umkehrungen.

6) Verlängert man die Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks über ihre Fußpunkte bis zu der Peripherie des umbeschriebenen Kreises, so ist jede Verlängerung gleich dem unteren Abschnitt der zugehörigen Höhe. — Umkehrung. — Gilt derselbe Satz für recht- und stumpfwinkelige Dreiecke?

Verbindet man die Endpunkte der eben genannten Verlängerungen mit einander, so sind die Höhenperpendikel die Winkelhalbirenden des neu entstandenen Dreiecks.

Errichtet man in einem Endpunkt einer Seite eines Dreiecks eine Senkrechte auf derselben bis zur Peripherie des umbeschriebenen Kreises, so ist diese Senkrechte gleich dem oberen Abschnitt des zu jener Seite gehörigen Höhenperpendikels.

Der obere Abschnitt eines jeden Höhenperpendikels ist doppelt so groß als die auf derselben Seite stehende Mittelsenkrechte.

Die Verbindungslinie des Halbirungspunktes des oberen Abschnittes eines Höhenperpendikels mit dem Halbirungspunkt der zugehörigen Seite ist gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises.

In jedem Dreieck liegen die Halbirungspunkte der Seiten, die Fußpunkte der Höhenperpendikel und die Halbirungspunkte der oberen Abschnitte der Höhen auf der Peripherie eines Kreises. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Halbirungspunkt der Verbindungslinie des Höhendurchschnitts mit dem Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, sein Radius ist halb so groß als der des letzteren. (Kreis der neun Punkte.)

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich dem Quadrat des Durchmessers des umbeschriebenen Kreises minus dem Quadrat des oberen Abschnitts des Höhenperpendikels.

7) Jede winkelhalbirende Transversale eines Dreiecks und die zu der gegenüberliegenden Seite gehörige Mittelsenkrechte schneiden sich auf der Peripherie des umbeschriebenen Kreises.

Die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes F einer Winkelhalbirenden und der Peripherie mit einem der anliegenden Eckpunkte B des Dreiecks ist gleich dem Abstand jenes Durchschnittspunktes F vom Durchschnittspunkt O der drei Winkelhalbirenden.

Verbindet man F mit B, zieht durch F den Durchmesser FG des umbeschriebenen Kreises, sodann BG und den zu AB senkrechten Radius OC des inneren Berührungskreises, so ist $\triangle BFG \backsim COA$. Hieraus folgt $AO.BF$, oder $AO.OF = 2r\varrho$.

Jede durch den Mittelpunkt O des inneren Berührungskreises eines Dreiecks gehende Sehne des umbeschriebenen Kreises wird in diesem Punkte O so getheilt, daß das Rechteck aus den Abschnitten gleich dem doppelten Rechteck aus den Radien der beiden Kreise ist.

Zieht man den Durchmesser durch M und O, so ergiebt sich hieraus:

Das Quadrat des Abstandes des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises vom Mittelpunkt des einbeschriebenen ist $d^2 = r^2 - 2r\varrho$.

Ist d_a die Entfernung zwischen M und dem Mittelpunkt O_a eines äußeren Berührungskreises, so ist $d_a{}^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_a$.

Zieht man von einem Eckpunkt A eines Dreiecks die Höhe AH und die Mittellinie AA', errichtet auf der gegenüberliegenden Seite die Mittelsenkrechte $A'M$, verbindet P mit M, und nennt den Durchschnittspunkt der Verbindungslinie mit der Mittellinie S, so folgt aus $\triangle APS \backsim A'MS$ und $AP = 2MA'$, daß AA' in S im Verhältniß $AS : SA' = 2 : 1$ getheilt wird, oder daß S der Schwerpunkt ist. Umgekehrt gilt der Satz:

Der Höhendurchschnitt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises liegen in einer Geraden.

Diese Gerade PM wird durch den Schwerpunkt im Verhältniß $PS : SM = 2 : 1$ getheilt.

Aufgaben:

1) Ein Dreieck aus einer Seite und den zu den anderen Seiten gehörigen Mittellinien zu construiren. Anal.: Es entsteht ein Dreieck, von dem zwei Seiten durch die oberen Abschnitte gebildet werden und die dritte die gegebene Seite ist. — 2) Ein Dreieck aus den drei Mittellinien zu construiren. Anal.: Ziehe durch den Fußpunkt einer Mittellinie eine Parallele zu einer zweiten bis zur dritten. Es entsteht ein Dreieck, dessen Seiten die dritten Theile der Mittellinien sind. — 3) Ein Dreieck aus seinen drei Höhen zu construiren. Anal.: Da die Höhen sich umgekehrt, wie die zugehörigen Seiten verhalten, so construire man ein Dreieck, dessen Seiten den gegebenen Höhen gleich sind; die Höhen dieses neuen Dreiecks verhalten sich zu einander, wie die Seiten des gesuchten. Hiernach kann man zunächst leicht ein dem gesuchten ähnliches construiren, oder die Winkel desselben finden. — 4) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Fußpunkte seiner drei Höhen gegeben sind. Constr. mittelst der Winkelhalbirenden des Höhendreiecks. — 5) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Mittelpunkte seiner äußeren Berührungskreise gegeben sind. Anal. durch die Höhen des Dreiecks $O_a\ O_b\ O_c$. 6) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Durchschnittspunkte seiner Höhen mit der Peripherie des umbeschriebenen Kreises gegeben sind. — Vergl. Nr. 6. — 7) In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu construiren, von dem eine Seite und der untere Abschnitt der zu ihr gehörigen Höhe gegeben sind. Vergl. Nr. 6.

Anhang 9. Die harmonische Theilung.

1) Eine Strecke AB wird durch einen zwischen ihren Endpunkten liegenden Punkt C in zwei Abschnitte AC, BC, durch einen auf ihrer Verlängerung liegenden Punkt D in zwei Abschnitte AD, BD getheilt. Die Strecke AB ist also gleich der Summe der Abschnitte AC und BC und gleich der Differenz der Abschnitte AD und BD. Man sagt, die Strecke AB sei durch C im Verhältniß von $AC : BC$, durch D im Verhältniß von $AD : BD$ getheilt.

Anmerkung: Ist AB durch C im Verhältniß $AC : BC$ getheilt, so ist BA durch C im Verhältniß $BC : AC$, oder im umgekehrten Verhältniß, wie AB getheilt.

Zu jedem Punkt C einer Strecke AB oder ihrer Verlängerung gehört ein zweiter Puukt C', welcher AB im umgekehrten Verhältniß, wie C theilt; derselbe liegt so, daß $AC = BC'$, $AC' = BC$ ist.

Bewegt sich ein Punkt C auf der Strecke AB in der Richtung von A nach B, so wird bei stetigem Fortschreiten von C das Verhältniß $AC : BC$ stetig größer und erhält alle Werthe von Null bis Unendlich. Es hat den Werth Null, wenn C auf A, den Werth 1, wenn C in der Mitte von AB, den Werth ∞, wenn C auf B liegt. Wird die Bewegung von C fortgesetzt, tritt also C auf die Verlängerung von AB über B hinaus, so nimmt der Werth des Verhältnisses $AC : BC$ wieder stetig ab, und zwar von ∞ bis 1. Den Werth 1 erhält es für einen in unendlicher Entfernung liegenden Punkt C. Läßt man hier diesen Punkt auf die Verlängerung von AB über A hinaus überspringen (vergl. § 6), und auf dieser sich aus dem Unendlichen bis nach A bewegen, so erhält das Verhältniß stetig alle Werthe von 1 bis Null. Hieraus folgt:

Eine gegebene Strecke kann stets durch zwei Punkte, und nur durch zwei in einem gegebenen Verhältniß getheilt werden. Von diesen beiden Punkten liegt der eine auf der Strecke selbst, der andere auf ihrer Verlängerung.

Eine Strecke AB heißt durch zwei Punkte C, D harmonisch getheilt, wenn sie durch dieselben in gleichem Verhältniß getheilt ist.

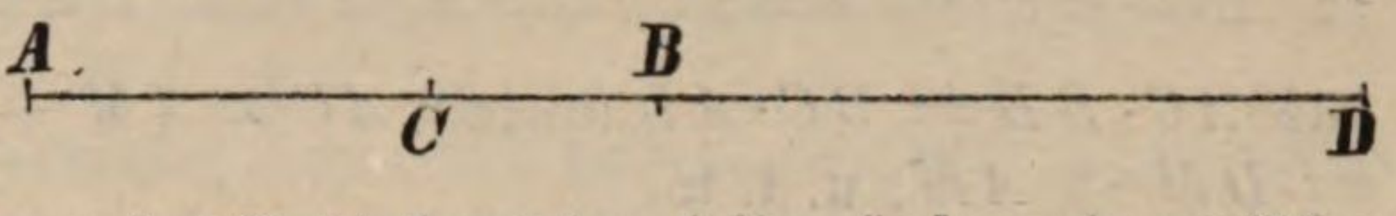
Zu jeder Strecke giebt es unzählig viele Paare harmonischer Theilpunkte. Die Punkte eines jeden solchen Paares heißen einander zugeordnet. Zu jedem gegebenen Verhältniß gehört nur ein Paar harmonischer Theilpunkte der Strecke. In jedem der beiden Endpunkte einer Strecke fallen zwei zugeordnete harmonische Theilpunkte derselben zusammen. Dem Halbirungspunkte einer Strecke ist ein unendlich entfernter Punkt zugeordnet und umgekehrt. Der einem Punkte C auf einer Strecke AB zugeordnete äußere harmonische Theilpunkt liegt auf der Verlängerung der Strecke über den Endpunkt des kleineren inneren Abschnittes.

Ist AB durch C, D harmonisch getheilt, so ist es auch CD durch A, B (denn aus $AC : BC = AD : BD$ folgt $AC : AD = BC : BD$). Daher heißen die Punkte A, B, C, D überhaupt harmonische Punkte, A und B, sowie C und D einander zugeordnet.

Aufgaben:

1) Auf einer Geraden AB ist ein Punkt C gegeben; man soll den zugeordneten harmonischen Punkt desselben finden. Vergl. L. 83, Zus. 2 und § 31, Uebungsaufgabe 2. — 2) Auf der Verlängerung der Strecke AB ist ein Punkt D gegeben; man soll den zugeordneten harmonischen Punkt desselben finden. — 3) Eine gegebene Strecke nach einem gegebenen Verhältniß harmonisch zu theilen.

Anmerkung: Ist $AC : BC = AD : BD$, so ist auch $AC . BD = BC . AD$, und umgekehrt. Daher kann man auch sagen, vier Punkte A, C, B, D einer Strecke



seien harmonische Punkte, wenn das Rechteck aus den beiden äußeren der zwischen ihnen liegenden Abschnitte gleich dem Rechteck aus dem mittleren und ihrer Summe (der ganzen Linie AD) sei.

Eine andere Definition berücksichtigt die Längen der drei von A ausgehenden Strecken AC, AB, AD. Aus $AC : BC = AD : BD$ folgt leicht $AC : (AB - AC) = AD : (AD - AB)$, oder $AC : AD = (AB - AC) : (AD - AB)$, und umgekehrt. Man kann demnach sagen, die drei Strecken AC, AB, AD stehen in harmonischer Proportion, wenn sich die erste zur dritten, wie der Ueberschuß der zweiten über die erste zum Ueberschuß der dritten über die zweite verhält. Diese Definition hat den Vortheil, sich leicht auch auf Zahlen anwenden zu lassen. Drei Zahlen a, b, c stehen hiernach in harmonischer Proportion, wenn $a : c = (b - a) : (c - b)$ ist. Dies ist z. B. der Fall mit den Zahlen 3, 4, 6. Drei musikalische Töne, deren Schwingungszahlen sich wie 3 : 4 : 6 verhalten, geben die Intervalle der Quarte, Quinte und Octave, daher der Name harmonische Proportion. Für geometrische Untersuchungen ist jedoch die hier ursprünglich gegebene Definition die practischste.

Weitere Sätze zu 1.

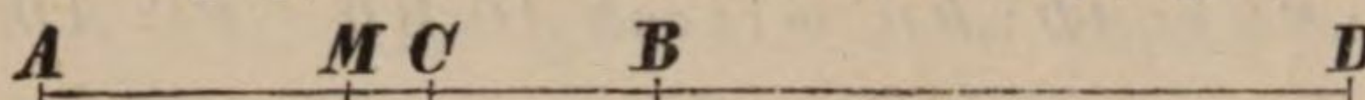
Es sei $AC : BC = AD : BD = m : n$. Man bestimme die Verhältnisse je zweier der Strecken AC, AB, AD, BC, CD, BD. Resultate: $AC : AB = m : (m + n)$, $BC : AB = n : (m + n)$, $AD : AB = m : (m - n)$, $BD : AB = n : (m - n)$, $AC : AD = BC : BD = (m - n) : (m + n)$, $AC : CD = (m - n) : 2n$, $AD : CD = (m + n) : 2n$, $BC : CD = (m - n) : 2m$, $BD : CD = (m + n) : 2m$, $AB : CD = (m^2 - n^2) : 2mn$, $AC : BD = m(m - n) : n(m + n)$, $AD : BC = m(m + n) : n(m - n)$.

Man beweise ferner folgende Sätze:

1) $AB \cdot CD = 2AC \cdot BD = 2BC \cdot AD$. 2) $AB^2 + CD^2 = (AC + BD)^2$, sowie ihre Umkehrungen, ferner 3) $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$ und $\frac{1}{DB} + \frac{1}{DA} = \frac{2}{DC}$, 4) $\frac{1}{CB} - \frac{1}{DB} = \frac{2}{AB}$ und $\frac{1}{BC} - \frac{1}{AD} = \frac{2}{CD}$. 5) $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD} = 2\left\{\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} - \frac{1}{AD}\right\}$; $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD} = 2\left\{\frac{1}{BC} - \frac{1}{AB} - \frac{1}{CD}\right\}$. 6) $\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD} = 2\left\{\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right\}$. 7) $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BD}$.

Zusätze: Aus 3) folgt $AB = \frac{2AC \cdot AD}{AC + AD}$, $CD = \frac{2DB \cdot DA}{DB + DA}$, sowie $\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}$, d. h. die reciproken Werthe dreier in harmonischer Proportion stehender Linien bilden eine stetige arithmetische Proportion. — Umkehrung dieses Satzes, sowie der übrigen oben stehenden.

2) Ist AB in C und D harmonisch getheilt und in M halbirt, so ist $AM^2 = CM \cdot DM$. In Worten? Beweis aus $AC \cdot BD = BC \cdot AD$ mittelst $AC = AM + CM$, $BD = DM - BM = DM - AM$, u. s. w.



Zusatz 1: Beschreibt man durch C und D einen Kreis und zieht an denselben von M aus eine Tangente, so ist letztere gleich $AM = BM$. — Ein um M mit AM als Radius beschriebener Kreis schneidet den durch C und D gehenden so, daß die beiden durch einen Durchschnittspunkt gehenden Tangenten zu einander senkrecht stehen, d. i. rechtwinkelig.

Zusatz 2: Ist AB in M halbirt und durch mehrere Punktenpaare CD, $C'D'$, $C''D''$ u. s. w. harmonisch getheilt, so ist $MC \cdot MD = MC' \cdot MD' = MC'' \cdot MD''$ u. s. w., gleich MA^2. Ein um M mit MA beschriebener Kreis wird daher durch alle Kreise, welche durch die beiden Punkte irgend eines dieser Paare gehen, rechtwinkelig geschnitten, oder die von M an alle diese Kreise gelegten Tangenten sind einander gleich.

Umkehrung 1: Ist AB durch C und D harmonisch getheilt, und liegt M auf AB zwischen A und B so, daß $MC \cdot MD = AM^2$ ist, so wird AB durch M halbirt. Bew. indirect.

Umkehrung 2: Ist AB durch M halbirt und sind auf AB, resp. deren Verlängerung und auf derselben Seite von M aus die Punkte C, D so gewählt, daß $AM^2 = CM \cdot DM$ ist, so ist AB durch C und D harmonisch getheilt. Bew. umgekehrt wie im Hauptsatze.

Anmerkung: Liegen C, D nicht auf derselben Seite von M, so kann AB durch sie, trotz der Gleichung $AM^2 = CM. DM$ nicht harmonisch getheilt werden.

Zusatz 3: Zieht man in einem Kreis eine Sehne CD und an denselben eine Tangente NM, welche die Verlängerung von CD in M trifft, und macht $MB = MA = MN$, so sind A, B und C, D vier harmonische Punkte.

Zusatz 4: Schneiden sich zwei Kreise rechtwinkelig, so wird jeder Durchmesser des einen durch die Durchschnittspunkte mit der Peripherie des anderen harmonisch getheilt.

Aufgabe 1: Mit Hülfe von Zus. 4 zu einem gegebenen Punkt einer gegebenen Strecke den zugehörigen harmonischen Theilpunkt zu construiren.

Erklärung: Ist AB durch CD, $C'D'$ u. s. w. harmonisch getheilt, so heißt der Halbirungspunkt M von AB der Centralpunkt der Punktenpaare CD, $C'D'$ u. s. w.

Aufgabe 2: Auf einer Geraden sind die Punktenpaare CD und $C'D'$ gegeben; man soll ihren Centralpunkt construiren. Constr. mittelst der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise, die durch CD, bezw. $C'D'$ gehen.

Aufgabe 3: Auf einer Geraden sind die Punktenpaare CD und $C'D'$ gegeben; man soll auf derselben zwei Punkte A, B bestimmen, welche mit jedem der beiden genannten Paare vier harmonische Punkte bilden. — Wie müssen CD und $C'D'$ gegen einander liegen?

Sätze zu 2.

Man beweise: 1) $MC : MD = BC^2 : BD^2 = AC^2 : AD^2$. 2) $AC . BC = MC . CD$, $AD . BD = MD . CD$. 3) $MA . CD = AC . BD = AD . BC$. 4) $CD^2 = AD . BD - AC . BC$, $AB^2 = AD . AC - BD . BC$. 5) $BC : BD = AC : AD = MC : MA = MA : MD$.

3) Erklärung: Verbindet man einen beliebigen Punkt S der Ebene mit vier auf einer Geraden gegebenen harmonischen Punkten AB, CD, so heißen die Verbindungslinien harmonische Strahlen; und zwar heißen je zwei, welche durch zwei einander zugeordnete der harmonischen Punkte gehen, einander zugeordnete Strahlen. Die vier harmonischen Strahlen bilden einen harmonischen Strahlenbüschel. Der Punkt S wird der Scheitel (oder Mittelpunkt) des Büschels genannt.

Die Strahlen werden als unbegrenzte Gerade gedacht. Man sagt, der Scheitel liege für vier parallele Strahlen im Unendlichen.

Lehrsatz: Schneidet man die Strahlen eines harmonischen Büschels durch eine beliebige Gerade, so sind die Durchschnittspunkte vier harmonische Punkte und zwar sind die aufzugeordneten Strahlen liegenden einander zugeordnet.

Beweis: Es seien A, C, B, D vier harmonische Punkte, S der Scheitel eines zugehörigen Büschels und MN eine beliebige Gerade, welche die Strahlen SA, SC, SB, SD bezw. in A', C', B', D' schneide. Man nehme an a) daß A' mit A zusammenfalle, ziehe dann durch B' die Linien $B'F \parallel C'C$, $B'G \parallel D'D$ bis zum Durchschnitt mit AD. Dann ist:

$$\frac{CF}{BC} = \frac{SB'}{SB} = \frac{GD}{BD}, \text{ daher } \frac{CF}{GD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}, \text{ oder}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{GD}{AD}; \frac{CF}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}, \frac{GD}{AD} = \frac{B'D'}{AD'}, \text{ also } \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B'D'}{AD'}, \text{ oder}$$

$AC' : B'C' = AD' : B'D'$. Es sei b) $A'D' \parallel AD$, so folgt der Beweis leicht aus L. 85. Endlich kann c) für jeden anderen Fall durch Verbindung der Fälle a und b der Beweis geführt werden.

Zusatz 1: Zieht man zu einem beliebigen Strahle eines harmonischen Büschels eine Parallele, so halbirt der zugeordnete Strahl das zwischen den beiden anderen Strahlen liegende Stück der Parallelen.

Zusatz 2: Werden umgekehrt von einer Geraden durch drei Strahlen eines harmonischen Büschels zwei gleiche Strecken abgeschnitten, so ist die Gerade dem vierten Strahle parallel.

Zusatz 3: Verbindet man die Endpunkte und den Halbirungspunkt einer Strecke mit einem beliebigen außerhalb derselben liegenden Punkt und zieht durch letzteren eine Parallele zu der Strecke, so erhält man einen harmonischen Büschel.

Lehrsatz: Halbirt man jeden von zwei Nebenwinkeln, so bilden die Halbirungslinien mit den Schenkeln einen harmonischen Büschel. Beweis: L. 95 u. Zus. Von den vier Strahlen dieses Büschels stehen zwei einander zugeordnete zu einander senkrecht.

Umgekehrt, stehen von vier harmonischen Strahlen zwei einander zugeordnete zu einander senkrecht, so halbirt der eine von ihnen den Winkel der beiden anderen zugeordneten Strahlen, der andere dessen Nebenwinkel.

Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, ist ein Kreis. Derselbe ist über dem Abstand der beiden Punkte als Durchmesser beschrieben, welche die Verbindungslinie der gegebenen Punkte in dem gegebenen Verhältnisse harmonisch theilen.

Gehen zwei harmonisch getheilte Gerade von demselben Endpunkt aus, so schneiden sich die drei Geraden, welche je zwei entsprechende der übrigen Theilpunkte mit einander verbinden, in einem einzigen Punkte, oder sind einander parallel. Ebenso schneiden sich auch die Geraden, welche den zweiten Theilpunkt je einer mit dem vierten der anderen verbinden, mit der Verbindungslinie der beiden dritten Theilpunkte in einem Punkt.

Gehen von zwei Punkten S, S' durch jeden von drei in gerader Linie liegenden Punkten A, C, B, Strahlen, so schneiden sich die zu je zwei durch denselben Punkt gehende Strahlen zugeordneten harmonischen Strahlen ebenfalls in einem Punkte dieser Geraden oder sind derselben parallel.

Aufgaben:

1) Zu einem von drei gegebenen Strahlen eines Büschels den zugeordneten harmonischen Strahl zu construiren. Drei Fälle.

2) Den Scheitel eines harmonischen Strahlenbüschels zu construiren, von welchem ein Strahl und für jeden der drei übrigen ein Punkt gegeben ist, durch welchen derselbe gehen soll.

3) Von vier harmonischen Punkten ist einer gegeben; man construire die übrigen, wenn für jeden derselben eine Gerade gegeben ist, auf welcher er liegen soll. (Diese Geraden sollen im Allgemeinen nicht nach einem Punkt convergiren.)

Anhang 10. Potenzen bei dem Kreise. Pole und Polaren.

Für alle Sehnen eines Kreises, welche durch einen und denselben Punkt gehen, hat das Product (Rechteck) der durch diesen Punkt gebildeten Abschnitte dieselbe Größe.

Dieser Satz gilt sowohl, wenn der Punkt innerhalb, als auch wenn er außerhalb des Kreises liegt, wenn man im letzteren Falle unter den Abschnitten einer Sehne die Abstände des auf ihrer Verlängerung liegenden Theilpunktes von den beiden Endpunkten versteht. Liegt der Punkt auf der Peripherie, so ist der eine Abschnitt und mithin auch das Product immer gleich Null.

Das genannte Product (Rechteck) ist für einen innerhalb des Kreises liegenden Punkt gleich dem Quadrate der Hälfte derjenigen Sehne, welche in

diesem Punkt halbirt wird, also derjenigen, welche auf dem durch diesen Punkt gehenden Radius senkrecht steht; für einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt ist dasselbe gleich dem Quadrate jeder der von diesem Punkt an den Kreis gehenden Tangenten.

Beweise durch § 30, Lehrs. 97, Zus. 1 u. 2. Lehrs. 98. Lehrs. 99.

Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen gegebenen Kreis nennt man den constanten Werth der Producte der beiden Abschnitte einer jeden durch diesen Punkt gehenden Sehne.

Zusätze: 1) Alle Punkte der Peripherie eines einem gegebenen concentrischen Kreises haben in Beziehung auf ersteren gleiche Potenzen. 2) Die Potenz eines innerhalb des Kreises liegenden Punktes ist um so größer, je näher der Punkt dem Mittelpunkt liegt; die Potenz eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes ist um so größer, je weiter der Punkt von dem Mittelpunkt entfernt ist. Die Potenz des Mittelpunktes ist gleich dem Quadrate des Radius. 3) Zu jedem Punkt innerhalb eines Kreises giebt es auf der Verlängerung des durch denselben gehenden Radius (außerhalb des Kreises) einen zweiten Punkt, der mit ihm gleiche Potenz hat. Läßt sich dieser Satz umkehren?

Wie ändert sich die Potenz eines Punktes, wenn derselbe sich stetig vom Mittelpunkte aus auf einem Radius bis zur Peripherie und sodann auf der Verlängerung dieses Radius bis ins Unendliche bewegt?

Aufgaben:

1) Einen Punkt zu construiren, der in Beziehung auf einen gegebenen Kreis eine gegebene Potenz hat. Unter welcher Bedingung erhält man für diesen Punkt zwei geometrische Oerter? Den geometrischen Ort aller Punkte zu construiren, deren Potenz in Beziehung auf einen gegebenen Kreis gleich dem Quadrate des Radius ist. — 2) Auf einer gegebenen Linie einen Punkt zu bestimmen, der in Beziehung auf einen gegebenen Kreis eine gegebene Potenz hat.

2. Jeder Punkt der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise hat in Bezug auf dieselben gleiche Potenzen.

Dasselbe gilt für die durch den Berührungspunkt gehende gemeinschaftliche Tangente bei Kreisen, die sich berühren.

Eine Linie, von welcher jeder Punkt in Beziehung auf zwei gegebene Kreise gleiche und gleichartige Potenzen hat (so daß also ein solcher Punkt entweder gleichzeitig außerhalb oder zugleich innerhalb beider Kreise liegt), heißt die Potenzlinie der beiden Kreise.

Von jedem außerhalb der Kreise liegenden Punkt derselben lassen sich gleich lange Tangenten an beide Kreise legen; durch jeden innerhalb beider liegenden Punkt der Potenzlinie lassen sich gleich lange, in diesem Punkt halbirte Sehnen in beide Kreise legen.

Zur Auffindung der Potenzlinie zweier beliebiger Kreise dienen folgende Sätze:

Hat ein Punkt P für zwei Kreise, M, M_1, gleiche und gleichartige Potenzen, so ist die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den Mittelpunkten der Kreise gleich der — in gleicher Ordnung genommenen

— Differenz der Quadrate der Radien; $PM^2 - PM_1{}^2 = r^2 - r_1{}^2$. Beweis mittelst der gleichen Tangenten oder halbirten Sehnen.

Jene Differenz hat also für alle solche Punkte denselben Werth. Umgekehrt, liegt ein Punkt P gegen zwei Kreise so, daß die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den Mittelpunkten gleich der entsprechend gebildeten Differenz der Quadrate der Radien ist, so hat dieser Punkt gegen beide Kreise gleiche und gleichartige Potenzen. Beweis wie vorher.

Alle Punkte, für welche die Differenzen der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine und dieselbe Größe haben, liegen auf einer Geraden. Diese Gerade steht senkrecht zu der Verbindungslinie der gegebenen Punkte.

Beweis: Es sei $PM^2 - PM_1{}^2 = P_1M^2 - P_1M_1{}^2$. Man verbinde P mit P_1 und fälle $PV \perp MM_1$ und $P_1T \perp MM_1$. Die Gerade PP_1 schneide MM_1 in Q. Mit Hülfe des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes und der Voraussetzung findet man, daß $QT = QV$ ist, woraus folgt, daß Q, T und V zusammenfallen, also PP_1 senkrecht zu MM_1 steht. Ist P_2 ein dritter Punkt von der genannten Eigenschaft, so müssen in gleicher Weise PP_2 und P_1P_2 zu MM_1 senkrecht stehen, also mit PP_1 zusammenfallen, u. s. w. — Kann PP_1 parallel MM_1 sein?

Der geometrische Ort eines Punktes, welcher in Bezug auf zwei gegebene Kreise gleiche und gleichartige Potenzen hat — die Potenzlinie der Kreise — ist eine zu der Centrallinie senkrechte Gerade.

Daher ist die Potenzlinie bestimmt, sobald ein Punkt derselben bestimmt ist.

Aufgaben:

1) Zu zwei gegebenen Kreisen einen Punkt mit gleichen Potenzen zu construiren. Construct. durch gleich lange Tangenten. — 2) Zu zwei gegebenen Kreisen die Potenzlinie zu construiren. Constr. mittelst der vorigen Aufgabe und einer Senkrechten, oder — da die vorige Construction gleichzeitig zwei Punkte gleicher Potenzen liefert — durch Verbindung dieser beiden Punkte. In welchen besonderen Fällen läßt sich die Construction nach dem Früheren vereinfachen?

Ist d die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise M, M_1, deren Radien bezüglich r und r_1 sind, ist ferner Q der Durchschnittspunkt der Potenzlinie von M und M_1 mit der Centrallinie und $MQ = p$, $M_1Q = q$, so gelten folgende Sätze:

Es ist $p^2 - q^2 = r^2 - r_1{}^2$. Ist $r = r_1$, so ist $p = q$, oder die Potenzlinie zweier gleicher Kreise halbirt die Centrallinie. — Ist $r > r_1$, so ist $p > q$, oder die Potenzlinie ist von dem Mittelpunkt des größeren Kreises weiter entfernt, als von dem des kleineren. — Unter derselben Voraussetzung ist $p = \frac{d^2 + r^2 - r_1{}^2}{2d}$ und $q = \pm \frac{d^2 - r^2 + r_1{}^2}{2d}$, wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem Q zwischen M und M_1 oder auf der Verlängerung von MM_1 (über M_1) liegt.

Liegen zwei Kreise ganz außerhalb einander, so liegt auch die Potenzlinie außerhalb beider und sie schneidet die Centrallinie zwischen den Mittel-

punkten. Wie liegt die Potenzlinie, wenn die Kreise sich von außen oder von innen berühren, wie wenn sie sich schneiden? Die Potenzlinie zweier Kreise, von denen einer ganz innerhalb des anderen liegt, liegt außerhalb beider Kreise und schneidet die Centrallinie auf der Verlängerung über den Mittelpunkt des kleineren Kreises. Die Potenzlinie zweier concentrischen Kreise liegt in unendlicher Entfernung von ihnen.

Umgekehrt: Schneidet die Potenzlinie zweier Kreise den einen von ihnen, so schneidet sie auch den anderen, und zwar in denselben Punkten; berührt sie den einen, so berührt sie auch den anderen, und zwar in demselben Punkte; liegt sie ganz außerhalb des einen, so liegt sie auch ganz außerhalb des anderen.

Die Halbirungspunkte aller gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise liegen in einer Geraden, nämlich der Potenzlinie dieser Kreise. — Anwendung zur Construction der Potenzlinie zweier ganz außerhalb einander liegender Kreise.

Wird auf der Centrallinie MM_1 zweier Kreise der Abstand QM des einen Mittelpunktes von der Potenzlinie nach der entgegengesetzten Seite von Q aus abgetragen und um den Endpunkt des abgetragenen Stückes ein dem Kreise M gleicher Kreis M_2 beschrieben, so ist die Potenzlinie von M und M_1 auch die Potenzlinie von M und M_2, sowie von M_1 und M_2.

Hiernach läßt sich zu jedem Kreise, welcher ganz innerhalb eines zweiten liegt, ein dritter außerhalb des letzteren construiren, welcher mit diesem dieselbe Potenzlinie hat, wie jener, und umgekehrt.

3) Die Potenzlinie dreier Kreise, deren Mittelpunkte nicht in gerader Linie liegen, schneiden sich in einem einzigen Punkt. — Beweis: Der Durchschnittspunkt zweier der drei Potenzlinien hat in Beziehung auf das dritte Paar der gegebenen Kreise gleiche Potenzen.

Dieser Punkt heißt der Potenzpunkt, oder das Potenzcentrum der drei Kreise.

Die Potenzlinien dreier Kreise, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen, sind parallel oder fallen zusammen. Im ersteren Fall kann man sagen, der Potenzpunkt liege im Unendlichen.

Besondere Fälle: Schneiden sich drei Kreise wechselseitig, so schneiden sich ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen in demselben Punkte. — Berührt jeder von drei Kreisen die beiden anderen, so schneiden sich die drei durch die Berührungspunkte gehenden gemeinschaftlichen Tangenten in demselben Punkt. — Berührt ein Kreis jeden von zwei sich schneidenden Kreisen, so liegt der Durchschnittspunkt der durch die Berührungspunkte gehenden gemeinschaftlichen Tangenten auf der gemeinschaftlichen Sehne. — Für alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise M, M_1 schneiden (oder berühren), liegen die Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Sehnen (oder Tangenten) auf einer Geraden, der Potenzlinie von M und M_1. — U. s. w.

Anwendung zur Construction der Potenzlinie zweier Kreise mittels eines dritten, beide schneidenden Kreises.

Die Potenzlinien dreier (oder mehrerer) Kreise, deren Mittelpunkte M, M_1, M_2 in geraden Linien liegen, fallen zusammen a) wenn die Kreise

sich sämmtlich in denselben zwei Punkten schneiden, b) wenn sie sich sämmtlich in demselben Punkte berühren, c) allgemein, wenn zwischen den Radien r, r_1, r_2 und den Centrallinien $M_1M_2 = d$, $MM_1 = d_2$, $MM_2 = d_1$ ($MM_2 = MM_1 + M_1M_2$) die Beziehung $d \cdot d_1 \cdot d_2 = r^2 d + r_2{}^2 d_2 - r_1{}^2 d_1$ besteht.

Zu zwei gegebenen Kreisen giebt es unzählig viele andere Kreise, so daß alle Potenzlinien zwischen denselben zusammenfallen.

Aufgaben:

Zu einem Kreis und seiner Potenzlinie gegen einen zweiten Kreis diesen letzteren zu construiren a) wenn der Radius des letzteren gegeben ist (zwei Aufl. In welchem Fall nur eine?); b) wenn der Mittelpunkt des letzteren auf der durch den Mittelpunkt des ersteren gehenden, zu der Potenzlinie senkrechten Geraden gegeben ist.

4) Denkt man sich den Radius des einen von zwei Kreisen veränderlich und läßt man denselben stetig abnehmen, so kann der Mittelpunkt als die Grenze betrachtet werden, welcher sich der Kreis ohne Ende nähert. (In diesem Sinne kann man sagen, der Kreis werde für den Radius Null zu einem Punkte.) Daher kann man die bisherigen Untersuchungen auch auf den Fall ausdehnen, daß statt eines oder mehrerer Kreise Punkte gesetzt werden.

Potenz eines Punktes P in Beziehung auf einen gegebenen Punkt A nennt man das Quadrat der Entfernung beider Punkte von einander. Welches ist demnach der geometrische Ort eines Punktes, der in Beziehung auf einen gegebenen Punkt eine gegebene Potenz hat?

Die Potenzlinie eines Punktes A und eines Kreises M, d. i. der geometrische Ort eines Punktes, der in Beziehung auf den gegebenen Punkt und den Kreis gleiche Potenzen hat, ist eine zu der Verbindungslinie des Mittelpunktes M mit dem Punkte A senkrechte Gerade.

Jeder Punkt dieser Potenzlinie hat die Eigenschaft, daß das Quadrat seines Abstandes von dem Mittelpunkte M, verringert um das Quadrat seines Abstandes vom Punkte A gleich dem Quadrat des Radius r des Kreises ist, und umgekehrt.

Liegt der Punkt A auf der Peripherie des Kreises M, so ist die Potenzlinie die durch A gehende Tangente des Kreises. Liegt A außerhalb oder innerhalb des Kreises, so liegt die Potenzlinie ganz außerhalb desselben. Fällt A mit dem Mittelpunkte M zusammen, so liegt die Potenzlinie im Unendlichen. — Umkehrungen.

Die Potenzlinie eines Kreises M und eines Punktes A schneidet die „Axe" MA in einem Punkte Q, so daß $MQ = \frac{d^2 + r^2}{2d}$, $AQ = \pm \frac{d^2 - r^2}{2d}$ ist, wobei d die Länge von MA, r den Radius des Kreises bezeichnet, und für AQ das Zeichen + oder — gilt, je nachdem A außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt. — Die Potenzlinie eines Kreises M und eines Punktes A liegt dem letzteren näher als dem Mittelpunkte M.

Die von einem Punkt der Potenzlinie eines Kreises M und eines Punktes A an den Kreis gezogene Tangente ist gleich dem Abstande zwischen P und A.

Die Halbirungspunkte der beiden von einem Punkte A außerhalb eines Kreises M an letzteren gehenden Tangenten liegen auf einer zu der Axe MA senkrechten Geraden, nämlich der Potenzlinie von M und A.

Die Potenzlinie zweier Punkte A, B, d. i. der geometrische Ort eines Punktes, der für beide gegebene Punkte A, B gleiche Potenzen hat, ist die auf AB in ihrer Mitte senkrechte Gerade.

Die Potenzlinien zweier Kreise und eines Punktes, die Potenzlinien eines Kreises und zweier Punkte, endlich die Potenzlinien dreier Punkte schneiden sich in einem einzigen Punkt, oder sind parallel, oder fallen zusammen. Unter welcher Bedingung tritt einer der beiden letzteren Fälle ein?

Der genannte Punkt heißt der Potenzpunkt (das Potenzcentrum) der Kreise oder Punkte.

Besondere Fälle: 1) Wenn zwei Kreise M, M_1 sich schneiden oder berühren und man zieht durch einen Punkt der Peripherie des einen eine Tangente an denselben, sowie von demselben Punkte zwei Tangenten an den letzteren, so schneiden sich die erstere Tangente und die Verbindungslinie der Halbirungspunkte der beiden letzteren stets in einem Punkte der gemeinschaftlichen Sehne oder gemeinschaftlichen Tangente der beiden Kreise. Oder, bewegt sich ein Punkt auf der Peripherie des einen von zwei beliebigen Kreisen, so bewegt sich der genannte Durchschnittspunkt auf einer Geraden, der Potenzlinie der beiden Kreise. — 2) Zieht man von zwei beliebigen Punkten Tangentenpaare an einen gegebenen Kreis, so schneiden sich die Verbindungslinien der Halbirungspunkte jedes Paares auf der Mittelsenkrechten der beiden ersteren Punkte. — 3) Zieht man von einem beliebigen Punkt A außerhalb eines Kreises Tangenten an denselben und verbindet ihre Halbirungspunkte, zieht man ferner durch einen beliebigen Punkt B der Peripherie des Kreises eine Tangente an denselben, so schneidet jene Verbindungslinie diese Tangente in einem von den beiden Punkten A, B gleichweit entfernten Punkte. —

Als specielle Fälle des allgemeinen Satzes ergeben sich auch die bekannten: Zwei von einem Punkte an einen Kreis gezogene Tangenten sind gleich lang, und die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem einzigen von den drei Eckpunkten gleichweit entfernten Punkte.

Zu jedem Punkt A außerhalb eines Kreises gehört ein Punkt B innerhalb desselben, welcher dieselbe Potenzlinie mit dem Kreise hat, wie jener, und umgekehrt. Der Punkt B liegt in demselben Abstand, wie A, von der Potenzlinie, auf der entgegengesetzten Seite derselben. Ist M der Mittelpunkt, r der Radius des Kreises, so ist $MA \cdot MB = r^2$. Der Punkt B ist der Durchschnittspunkt der Verbindungslinie der Berührungspunkte der von A an den Kreis gehenden Tangenten (der „Berührungssehne“ des Punktes A) und der Axe MA. Die Punkte A und B heißen einander zugeordnete Pole des Kreises M. Der dem Mittelpunkt des Kreises M zugeordnete Pol liegt im Unendlichen. Bewegt sich B von M nach der

Peripherie, so bewegt sich A aus dem Unendlichen nach der Peripherie, oder je weiter B von M absteht, desto näher liegt A an M. Der einem Punkte der Peripherie zugeordnete Pol fällt mit diesem Punkte zusammen. — Der zu zwei zugeordneten Polen eines Kreises gehörige Durchmesser wird durch dieselben harmonisch getheilt, und umgekehrt.

Aufgaben:

1) Die Potenzlinie eines Kreises M und eines Punktes P zu construiren. — 2) Zu einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkt den zugeordneten Pol zu construiren. — 3) Ebenso zu einem innerhalb des Kreises gegebenen Punkt. — 4) Mit Hülfe der vorhergehenden Constructionen zu einem gegebenen Punkt einer Strecke den zugeordneten harmonischen Theilpunkt zu construiren.

Anmerkung: Denkt man sich den Radius eines Kreises ohne Ende wachsend, so nähert sich der Kreis einer Geraden. Eine Gerade kann in diesem Sinne als ein Kreis mit unendlich großem Radius angesehen werden. Daher kann man die bisherigen Untersuchungen auch auf den Fall ausdehnen, daß statt eines oder mehrerer Kreise eine (oder mehrere) Gerade gegeben sind.

5) Aufgaben: Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, so daß a) die von ihr an zwei gegebene Kreise gelegten Tangenten gleich lang sind, oder b) daß die von ihm halbirten Sehnen zweier gegebenen Kreise gleich lang sind, oder c) daß die von ihm an einen gegebenen Kreis gelegte Tangente gleich seinem Abstand von einem gegebenen Punkt ist.

Einen Punkt zu bestimmen, so daß a) die von ihm an drei gegebene Kreise gelegten Tangenten, oder b) die von ihm halbirten Sehnen dreier gegebener Kreise gleich lang sind, oder daß c) die von ihm an zwei gegebene Kreise gelegten Tangenten seinem Abstand von einem gegebenen Punkt gleich sind, oder daß d) seine Abstände von zwei gegebenen Punkten unter sich und der von ihm an einen gegebenen Kreis gelegten Tangente gleich sind.

6) Rechtwinkelig schneidende Kreise. Unter dem Winkel zweier sich schneidender krummer Linien versteht man den Winkel zwischen den im Durchschnittspunkt an beide gelegten Tangenten.

Zwei Kreise schneiden sich demnach rechtwinkelig, wenn die in einem Durchschnittspunkt an beide gelegten Tangenten zu einander senkrecht stehen. In diesem Fall ist der nach dem Durchschnittspunkt gehende Radius des einen eine Tangente des anderen, und die beiden nach dem Durchschnittspunkte gehenden Radien stehen zu einander senkrecht. Umkehrung.

Zwei Kreise, die sich in einem Durchschnittspunkt rechtwinkelig schneiden, schneiden sich auch in dem anderen rechtwinkelig.

Beschreibt man um einen beliebigen Punkt außerhalb eines gegebenen Kreises mit der von ihm an diesen Kreis gehenden Tangente als Radius einen zweiten Kreis, so schneiden sich die beiden Kreise rechtwinkelig.

Aufgaben:

1) Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneide, wenn sein Mittelpunkt gegeben ist. — 2) Den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises zu bestimmen, der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet, wenn sein Radius gegeben ist. — 3) Einen Kreis mit gege-

benem Radius zu construiren, der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneide, und zwar a) wenn eine Linie gegeben ist, auf welcher sein Mittelpunkt liegen soll, b) wenn einer der Durchschnittspunkte gegeben ist.

Schneiden sich zwei Kreise M, M_1 rechtwinkelig, so wird der auf ihrer „Axe" MM_1 liegende Durchmesser des einen durch den Mittelpunkt des anderen und durch seinen Durchschnittspunkt mit der gemeinschaftlichen Sehne harmonisch getheilt. — Umkehrung.

Schneiden sich zwei Kreise rechtwinkelig, so wird der auf der Axe liegende Durchmesser des einen durch die Endpunkte des Durchmessers des anderen harmonisch getheilt. — Beschreibt man über dem Abstand je zweier zugeordneter von vier harmonischen Punkten einen Kreis, so schneiden sich beide Kreise rechtwinkelig. Vergl. Anhang 9, Nr. 2.

Die Potenzlinie zweier Kreise ist der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher jeden der beiden ersteren rechtwinkelig schneidet. Man construire den Radius eines solchen Kreises. Ausgenommen sind solche Punkte der Potenzlinie, welche nicht außerhalb der Kreise liegen.

Jeder innerhalb zweier sich schneidender Kreise liegende Punkt der Potenzlinie derselben ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher von jedem der beiden ersten im Durchmesser geschnitten wird, und umgekehrt. Man bestimme den Radius dieses Kreises.

Die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes ist der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher den gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet und durch den gegebenen Punkt geht.

Welche Aufgaben sind durch die drei vorstehenden Sätze unmittelbar gelöst?

Aufgaben:

Einen Kreis zu construiren, 1) der drei gegebene Kreise rechtwinkelig schneide; 2) der von jedem von drei gegebenen, sich gegenseitig schneidenden Kreisen im Durchmesser geschnitten wird; 3) der zwei gegebene Kreise rechtwinkelig schneide und durch einen gegebenen Punkt gehe; 4) der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneide und durch zwei gegebene Punkte gehe.

7) Zweite Potenzörter. Schneidet ein Kreis O jeden von zwei gegebenen Kreisen M, M_1 im Durchmesser, so hat die Differenz der Quadrate der Abstände seines Mittelpunktes von den beiden Mittelpunkten M, M_1 einen constanten Werth, nämlich gleich der in umgekehrter Ordnung genommenen Differenz der Quadrate der Radien der Kreise M, M_1. ($OM^2 - OM_1{}^2 = r_1{}^2 - r^2$). — Umkehrung.

Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei gegebene Kreise in ihren Durchmessern schneidet, ist eine zu der Centrallinie dieser Kreise senkrechte Gerade.

Diese Linie heißt der zweite Potenzort der beiden gegebenen Kreise.

Trägt man den Abstand des Mittelpunktes des einen von zwei Kreisen von ihrer Potenzlinie von dem anderen Mittelpunkt aus in entgegengesetzter Richtung auf der Centrallinie ab und errichtet auf letzterer im Endpunkt des abgetragenen Stückes eine Senkrechte, so ist diese der zweite Potenzort der beiden Kreise.

Die Potenzlinie und der zweite Potenzort zweier Kreise sind also gleichweit vom Halbirungspunkt der Centrallinie entfernt. Für gleiche Kreise fallen sie zusammen.

Anwendung zur Construction des zweiten Potenzortes. Andere Construction, indem man den Durchschnittspunkt T der Centrallinie MM_1 und des zweiten Potenzortes mit Hülfe der Gleichung $TM^2 - TM_1{}^2 = r_1{}^2 - r^2$, oder $TM^2 + r^2 = TM_1{}^2 + r_1{}^2$ bestimmt.

Schneidet der eine der beiden gegebenen Kreise den anderen im Durchmesser, so geht die Potenzlinie durch den Mittelpunkt des letzteren, der zweite Potenzort durch den Mittelpunkt des ersteren. Die Centrallinie d ist in diesem Falle gleich $\sqrt{r^2 - r_1{}^2}$. Ist $d^2 > r^2 - r_1{}^2$, so liegen beide Linien zwischen den Mittelpunkten; ist $d^2 < r^2 - r_1{}^2$, so liegen die Mittelpunkte zwischen den beiden Linien.

Die Peripherien aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise im Durchmesser schneiden, gehen durch dieselben zwei Punkte der Centrallinie. (Denn sind O, O_1 zwei die Kreise M und M_1 im Durchmesser schneidende Kreise, so sind M und M_1 Punkte der Potenzlinie von O und O_1.) — Alle Kreise, die einen gegebenen Kreis unter dem Durchmesser schneiden, und deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen, schneiden sich in denselben zwei, mit dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises in gerader Linie liegenden Punkten.

Jeder Punkt des zweiten Potenzortes zweier Kreise hat die Eigenschaft, daß die Differenz seiner Potenzen für die beiden Kreise eine sich gleichbleibende Größe, nämlich gleich dem Doppelten der — in entgegengesetztem Sinn, wie die Differenz der Potenzen genommenen — Differenz der Quadrate der Radien ist. (Linie äquidifferenter Potenzen.)

Die zweiten Potenzörter dreier Kreise, deren Mittelpunkte nicht in gerader Linie liegen, schneiden sich in einem einzigen Punkt. Bew. durch die Differenzen der Potenzen. — Welche Lagen können die zweiten Potenzörter gegen einander haben, wenn die Mittelpunkte in gerader Linie liegen?

Die Verbindungslinie des Potenzpunktes und des Durchschnittspunktes der zweiten Potenzörter dreier Kreise wird durch den Mittelpunkt desjenigen Kreises halbirt, welcher durch die Mittelpunkte der drei Kreise geht.

Unter dem zweiten Potenzort eines Kreises und eines Punktes versteht man den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher den gegebenen Kreis im Durchmesser schneidet und durch den gegebenen Punkt geht. Welche — den vorstehenden analoge — Sätze gelten über diesen zweiten Potenzort?

Bildung und Auflösung von Aufgaben über Constructionen von Kreisen, welche gegebene Kreise im Durchmesser schneiden, bezw. durch gegebene Punkte gehen.

8) Dritte Potenzörter. Soll ein Kreis O einen gegebenen Kreis M rechtwinkelig und einen anderen gegebenen Kreis M_1 im Durchmesser schneiden, so ist die Differenz der Quadrate der Abstände des Mittelpunktes O von den Mittelpunkten M, M_1, oder $OM^2 - OM_1{}^2$ eine sich gleich bleibende Größe, nämlich gleich der Summe der Quadrate der Radien.

Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines solchen Kreises ist eine

zur Centrallinie MM_1 senkrechte Gerade. Diese Gerade heiße der dritte Potenzort der Kreise M und M_1. Soll dagegen der Kreis O den Kreis M_1 rechtwinkelig und den Kreis M im Durchmesser schneiden, so heißt der geometrische Ort des Mittelpunktes O der dritte Potenzort der Kreise M_1 und M. Der dritte Potenzort von M und M_1 ist verschieden von dem dritten Potenzorte der Kreise M_1 und M. Beide Oerter stehen gleichweit vom Halbirungspunkt der Centrallinie ab.

Construction eines dritten Potenzortes zweier Kreise, indem man seinen Durchschnittspunkt V mit der Centrallinie mit Hülfe des Satzes $VM^2 - VM_1{}^2 = r^2 + r_1{}^2$, oder $VM^2 - r^2 = VM_1{}^2 + r_1{}^2$ findet. Ist M_1A ein zu MM_1 senkrechter Radius, so ist V ein Punkt der Potenzlinie des Kreises M und des Punktes A.

Für jeden Punkt des dritten Potenzortes der Kreise M, M_1 hat die Differenz seiner Potenzen in Beziehung auf beide Kreise einen sich gleichbleibenden Werth, sie ist nämlich gleich dem doppelten Quadrat des Radius des Kreises M_1.

Alle Kreise, welche einen gegebenen Kreis M rechtwinkelig und einen anderen gegebenen Kreis M_1 im Durchmesser schneiden, gehen durch dieselben Punkte der Centrallinie MM_1. Denn sind O, O_1 zwei solche Kreise, so liegt der Mittelpunkt M auf ihrer Potenzlinie; und ebenso der Mittelpunkt M_1, u. s. w.

Man untersuche, in welchem Fall die beiden dritten Potenzörter zweier Kreise durch die Mittelpunkte gehen, in welchem sie zwischen den letzteren, und in welchem Fall letztere zwischen den Potenzörtern liegen.

Für drei gegebene Kreise M, M_1, M_2 schneiden sich je zwei dritte Potenzörter mit einem der zweiten Potenzörter in demselben Punkte, vorausgesetzt, daß sie nicht parallel sind oder zusammenfallen. Welche Oerter sind es? Wieviele solche Durchschnittspunkte erhält man? — Ebenso schneiden sich je zwei dritte Potenzörter und eine Potenzlinie in demselben Punkt. Welche? Wieviel Durchschnittspunkte erhält man hier? — Beweise ähnlich wie bei den analogen früheren Sätzen.

Der dritte Potenzort eines Kreises und eines Punktes fällt mit ihrer Potenzlinie, der dritte Potenzort eines Punktes und eines Kreises mit ihrem zweiten Potenzort zusammen.

Bildung und Auflösung hierher gehöriger Aufgaben über die Construction von Kreisen.

---

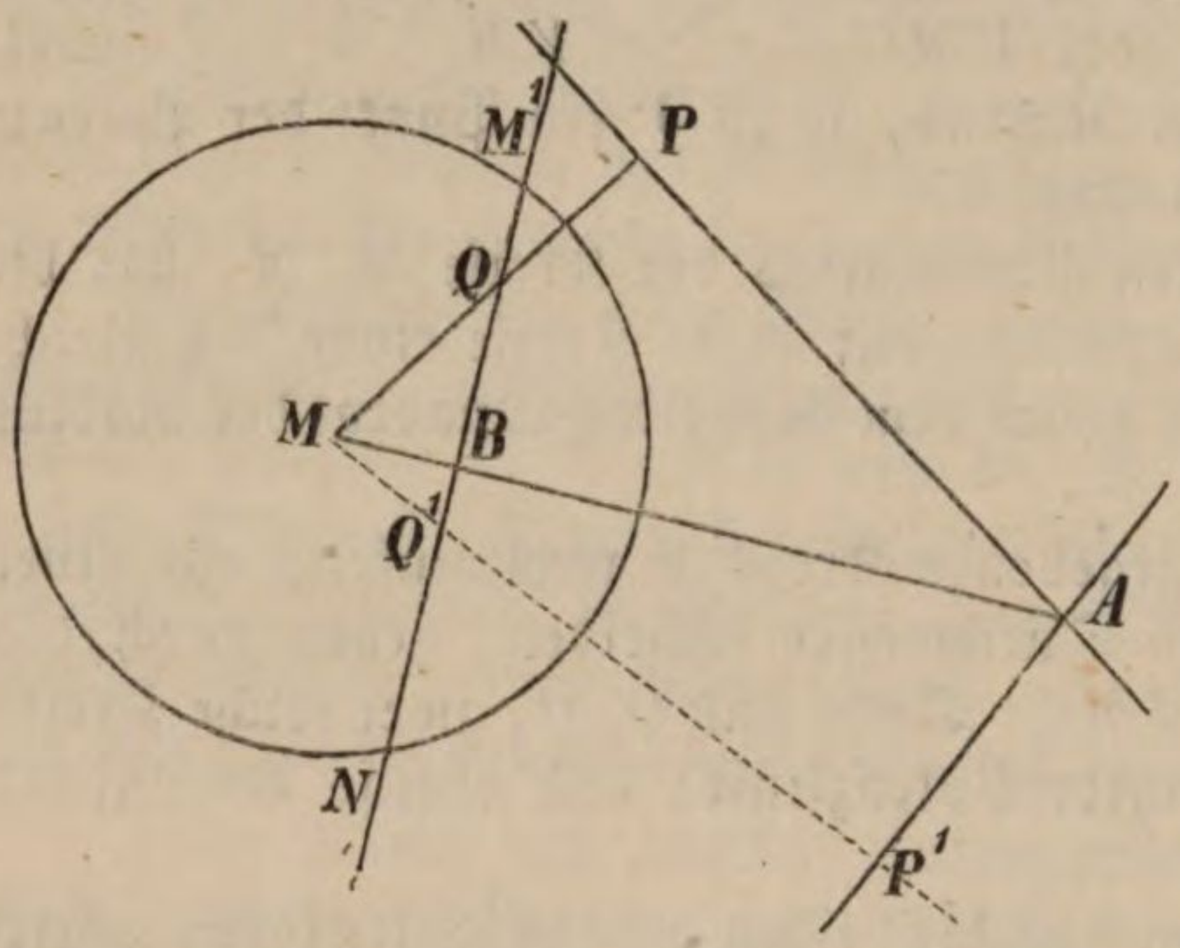
9) Polaren. Eine Gerade, welche in dem einen von zwei einander zugeordneten Polen eines Kreises zu der durch beide Pole gehenden Centrale senkrecht steht, heißt die Polare zu dem anderen Pol, und umgekehrt heißt der letztere der zu dieser Senkrechten gehörige Pol.

Die Polare eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes geht durch die Berührungspunkte der von ihm an den Kreis gezogenen Tangenten. Dieselbe schneidet also den Kreis. Die Polare eines auf der Peripherie liegenden Punktes ist die durch diesen Punkt gehende Tangente, die Polare eines innerhalb des Kreises liegenden Punktes liegt außerhalb des Kreises und geht durch den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten, deren Berüh-

rungssehne in jenem Punkte halbirt wird. Die Polare des Mittelpunktes ist eine beliebige, in unendlicher Ferne gedachte Gerade. Jeder Durchmesser ist die Polare der beiden, auf der zu ihm senkrechten Centrale in unendlicher Entfernung gedachten Punkte.

Aufgabe:

Zu einem beliebigen, in der Ebene eines Kreises gegebenen Punkt die Polare zu construiren, und umgekehrt, zu einer gegebenen Polare den Pol.



Zieht man durch den Pol A einer Geraden $M'N$ beliebige Gerade AP, AP^1 und fällt auf dieselben von dem Mittelpunkt M die Senkrechten MP, MP^1, so schneiden diese letzteren die Polare $M'N$ in den Polen Q, Q^1 der Geraden AP, AP^1. Denn ist B der Durchschnittspunkt der Linie MA mit der Polare MN, also B der zu A zugeordnete Pol, so ist $\triangle MQB \sim MAP$, daher $MQ \cdot MP = MA \cdot MB = r^2$, also sind Q und P einander zugeordnete Pole, u. s. w.

Hieraus folgen die Lehrsätze:

Schneiden sich mehrere gerade Linien in einem Punkte, so liegen ihre Pole auf einer Geraden, nämlich auf der Polare des Durchschnittspunktes. Umgekehrt: Die Polaren der auf einer Geraden liegenden Punkte schneiden sich in einem einzigen Punkt, nämlich dem Pole jener Geraden. — Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die Polare des Durchschnittspunktes der zu jenen Punkten gehörigen Polaren, und der Durchschnittspunkt zweier Geraden ist der Pol der Verbindungslinie der zu diesen Geraden gehörigen Pole. — Ist der Durchschnittspunkt zweier Geraden der Pol einer dritten Geraden, so geht die dritte durch die Pole der ersteren. Liegen die Scheitel mehrerer Winkel, deren Schenkel einen Kreis berühren, in gerader Linie, so schneiden sich die zugehörigen Berührungssehnen in einem Punkte, und umgekehrt.

Anhang 11.

Das Apollonische Berührungs-Problem für den Kreis.

Es sei die Aufgabe gestellt, einen Kreis zu construiren, der drei aus Kreisen, Geraden oder Punkten beliebig ausgewählte Stücke zugleich berühre, beziehungsweise durch die Punkte gehe.

Diese Aufgabe zerfällt, je nach der Art der gegebenen Stücke, in zehn einzelne Aufgaben, nach folgender Uebersicht:

1) Gegeben drei Punkte,
2) „ zwei Punkte und eine Gerade,

3) Gegeben zwei Punkte und ein Kreis,
4) „ ein Punkt und zwei Gerade,
5) „ ein Punkt, eine Gerade und ein Kreis,
6) „ ein Punkt und zwei Kreise,
7) „ drei Gerade,
8) „ zwei Gerade und ein Kreis,
9) „ eine Gerade und zwei Kreise,
10) „ drei Kreise.

A. Aeltere Lösung.

1. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der durch drei gegebene Punkte geht.

Construction bekannt. Wieviel Kreise erhält man? Welche Lage der drei Punkte ist nicht gestattet?

2. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der durch zwei gegebene Punkte P, P_1 geht und eine gegebene Gerade MN berührt.

Analyse 1: Ziehe durch P und P_1 eine Gerade, welche MN in A schneidet, so ist die Lage des Berührungspunktes B auf MN durch $AB^2 = AP \cdot AP_1$ bestimmt. Zwei geom. Oerter für den Mittelpunkt O.

Man erhält im Allgemeinen zwei Kreise. Ist $PP_1 \parallel MN$, so ergiebt sich leicht eine einfachere Construction mit nur einer Auflösung. Liegt P auf MN, so wird die Constr. ebenfalls vereinfacht, und man erhält nur einen Kreis. Unmöglich wird die Aufl., wenn P und P_1 zugleich auf MN, oder wenn sie auf verschiedenen Seiten von MN liegen.

Analyse 2: Man constr. einen beliebigen Kreis K durch P und P_1, so ist PP_1 die Potenzlinie desselben mit dem gesuchten, daher eine von dem Durchschnittspunkt A der Linien PP_1, MN an K gezogene Tangente gleich AB.

Analyse 3: Es sei $PD = P_1D$, $DS \perp PP_1$ und um einen beliebigen Punkt K von DS ein MN berührender Kreis beschrieben. Der Durchschnittspunkt S von DS und MN ist der Aehnlichkeitspunkt des Hülfskreises K und des gesuchten O. Schneidet PS den Kreis K in E und E_1, so ist $PO \parallel KE$ oder $PO \parallel KE'$. Hierdurch ist der Mittelpunkt O auf DS bestimmt. Wie gestaltet sich diese Constr., wenn $PP_1 \perp MN$ ist?

3. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der durch zwei gegebene Punkte PP_1 geht, und einen gegebenen Kreis K berührt.

Analyse: Ist C der Berührungspunkt des Kreises K mit dem gesuchten O, CA die gemeinschaftliche Tangente derselben, welche PP_1 in A schneide, und zieht man von A eine beliebige Secante durch K, welche diesen in D und D_1 schneide, so ist $AP \cdot AP_1 = AD \cdot AD_1$, daher PP_1DD_1 ein Kreisviereck. Nimmt man daher D auf der Peripherie von K beliebig an, legt durch P, P_1 und D einen Kreis, zieht DD_1, bestimmt hierdurch A und zieht von A die Tangente AC an K, so erhält man den Berührungspunkt C.

Da von A zwei Tangenten an K möglich sind, so erhält man im Allgemeinen zwei Kreise. Man hat folgende einzelne Fälle zu unterscheiden:

1) P liegt außerhalb K. Man ziehe von P die Tangenten PE, PF an K.

a) P_1 liegt auf einer dieser Tangenten. Ein Kreis. Berührung von außen, wenn P_1 mit P auf derselben Seite des Berührungspunktes der Tangente liegt, umschließend, wenn P_1 und P zu verschiedenen Seiten dieses Berührungspunktes liegen. Fällt P_1 mit dem Berührungspunkt zusammen, so erhält man keine Auflösung.

b) P_1 liegt innerhalb des Winkels EPF oder seines Scheitelwinkels. Zwei Kreise, welche K gleichartig berühren, und zwar beide von außen, wenn P und P_1 auf derselben Seite der Berührungssehne DEF liegen, beide umschließend, wenn P und P_1 zu verschiedenen Seiten der Berührungssehne liegen. Liegt aber P_1 innerhalb K, so erhält man keinen, liegt P_1 auf der Peripherie von K, so erhält man einen Kreis.

c) P_1 liegt innerhalb eines der Nebenwinkel von EPF. Man erhält zwei Kreise, von denen einer K von außen, der andere K umschließend berührt.

2) P liegt auf der Peripherie von K. Liegt P_1 ebenfalls auf der Peripherie, so erhält man keinen Kreis, liegt P_1 innerhalb K, so erhält man einen, K von innen berührenden Kreis.

3) P und P_1 liegen innerhalb K. Zwei Kreise. Berührungen von innen.

Als besondere Fälle können noch behandelt werden: 1) P und P_1 liegen mit dem Mittelpunkt von K in gerader Linie. 2) P und P_1 stehen gleich weit von K ab.

Analyse 2: Beschreibt man durch P und P_1 einen K in D und D_1 schneidenden Hülfskreis und zieht DD_1 und PP_1, so ist der Durchschnittspunkt A dieser Linien der Potenzpunkt der drei Kreise. Die von A an K gezogene Tangente liefert daher den Berührungspunkt B.

Analyse 3: Ist C der Berührungspunkt der Kreise und schneiden PC und P_1C die Peripherie von K bezüglich in D und D_1, so ist $DD_1 \parallel PP_1$, daher $PC : CD = P_1C : CD_1$, also $PC : PD = P_1C : P_1D_1$, also auch $PC^2 : PC \cdot PD = P_1C^2 : P_1C \cdot P_1D_1$. Sind nun PE, P_1E_1 Tangenten an K, so folgt: $PC : PE = P_1C : P_1E_1$, oder $PC : P_1C = PE : P_1E$. Daher liegt B auf einem Halbkreis, der über dem Abstand derjenigen Punkte construirt wird, die PP_1 im Verhältniß $PE : P_1E_1$ harmonisch theilen.

4. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Gerade MN, M_1N_1 berührt.

Analyse 1: Man bestimme den geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der MN und M_1N_1 berührt, fälle auf denselben die Senkrechte PQ und verlängere PQ um $QP_1 = QP$, so ist P_1 ein zweiter Punkt der gesuchten Kreislinie, daher die Aufgabe auf die zweite zurückgeführt.

Man erhält somit auch in diesem Falle im Allgemeinen zwei Kreise. Convergiren MN und M_1N_1, so darf P nicht der Durchschnittspunkt sein. Liegt P auf einem anderen Punkte von MN, so vereinfacht sich die Construction, und man erhält mittelst jeder der zwei Winkelhalbirenden einen Kreis. Ist $MN \parallel M_1N_1$, so erhält man ebenfalls eine einfachere Construction. Es darf P in diesem Falle nicht außerhalb des zwischen MN und

$M_1 N_1$ eingeschlossenen Flächenstreifens liegen. Liegt P auf MN, so erhält man in diesem Fall nur einen Kreis.

Liegt P auf dem genannten geometrischen Ort, so ist die Construction abzuändern. Sie kann dann auf die der siebenten Aufgabe zurückgeführt werden.

Analyse 2: Construirt man einen beliebigen Kreis O_1, welcher MN und $M_1 N_1$ berührt, so ist der Durchschnittspunkt A der letzteren Linien ein Aehnlichkeitspunkt beider Kreise. Schneidet PA die Peripherie von O_1 in E und F, und ist O der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, so ist EO_1 oder FO_1 parallel PO. Wie gestaltet sich diese Construction, wenn MN parallel $M_1 N_1$ ist?

5. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt P geht, eine gegebene Gerade MN und einen gegebenen Kreis K berührt.

Analyse: Zieht man in K den zu MN senkrechten Durchmesser DD_1, welcher MN in E schneide, und ist B der Berührungspunkt des gesuchten Kreises O mit MN, C sein Berührungspunkt mit K, so ist BCD eine gerade Linie, daher $\triangle DCD' \backsim DBE$, also $DC \cdot DB = DD' \cdot DE$. Zieht man nun DP und nennt den Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Peripherie des gesuchten Kreises Q, so ist also auch $DQ \cdot DP = DD' \cdot DE$. Daher liegt Q auf der Peripherie eines durch P, D' und E gehenden Kreises. Hierdurch ist die Aufgabe auf die zweite (oder dritte) zurückgeführt.

Liegt MN ganz außerhalb K, P ebenfalls außerhalb K und mit K auf derselben Seite von M, so erhält man, je nachdem man P mit dem von MN entfernteren oder mit dem MN näheren Endpunkt des Durchmessers DD' verbindet, eine Berührung von außen, oder eine umschließende. In jedem dieser beiden Fälle kann man zwei, im Ganzen also vier Kreise erhalten.

Die Discussion der einzelnen Fälle hat sich zu richten 1) nach der Lage des Punktes P gegen den Kreis K; 2) nach der Lage der Linie MN gegen den Punkt P und gegen den Kreis K. Liegt P außerhalb K, so ziehe man von ihm die Tangenten PE, PF an K und unterscheide, ob MN mit einer dieser Tangenten zusammenfällt, ihr parallel ist oder sie schneidet. Man unterscheide dann ferner die einzelnen Fälle nach der verschiedenen Lage der Durchschnittspunkte von MN mit den Tangenten, u. s. w. In mehreren Fällen erhält man einfachere Constructionen. Man beachte hierbei den Satz: Ein Kreis, der einen gegebenen Kreis K und eine gegebene Gerade MN berührt, ist concentrisch einem andern Kreise, der durch den Mittelpunkt von K geht und eine der MN — in einem dem Radius des Kreises K gleichen Abstand — parallele Gerade berührt.

6. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise K, K_1 berührt.

Analyse: Der gesuchte Kreis O berühre K in C, K_1 in C_1. Es sei ferner durch C und C_1 eine Gerade gezogen, welche die Centrale KK_1 in A und die Peripherie K zum zweiten Male in D schneide. Man zeige, daß $KD \parallel OC_1$, also auch $KD \parallel K_1 C_1$ ist. Daher ist $AK : AK_1 =$

$KD : K_1 C_1 = r : r_1$, wodurch A bestimmt ist. (A ist äußerer oder innerer Aehnlichkeitspunkt von K und K_1, je nachdem diese Kreise von O gleichartig oder ungleichartig berührt werden.) Unter den Durchschnittspunkten der Axe KK_1 mit den Peripherien von K und K_1 kann man zwei E, F annehmen, welche mit C und C_1 ein Kreisviereck bilden. (Sie sind in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A potenzhaltende Punkte. (Vergl. Anhang 3, Nr. 18.). Also ist $AC_1 \cdot AC = AF \cdot AE$, daher, wenn AP gezogen wird, und Q der Durchschnittspunkt von AP mit der Peripherie von O ist, $AP \cdot AQ = AF \cdot AE$. Hierdurch ist Q bestimmt, und somit die Aufgabe auf die dritte zurückgeführt.

Man erhält im Maximum vier Kreise, von denen zwei K und K_1 gleichartig, die beiden anderen ungleichartig berühren. Bei der Discussion der zahlreichen einzelnen Fälle beachte man u. A. die Lage des Punktes P gegen die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise K und K_1.

7. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Gerade berührt.

Construction bekannt. Man erhält vier, zwei oder keinen Kreis je nach der Lage der drei Geraden gegen einander.

8. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Analyse: Man ziehe zu jeder der gegebenen Geraden eine Parallele in einem Abstand, welcher dem Radius des gegebenen Kreises gleich ist. (4 Linien). Es giebt dann einen dem gesuchten concentrischen Kreis, welcher die beiden Parallelen berührt und durch den Mittelpunkt des gegebenen geht. Demnach ist die Aufgabe auf die vierte zurückgeführt.

Es giebt im Maximum acht Kreise, welche der Aufgabe genügen. Bei der Unterscheidung der einzelnen Fälle berücksichtige man die Lage des Durchschnittspunktes der gegebenen Geraden gegen den gegebenen Kreis.

9. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der eine gegebene Gerade MN und zwei gegebene Kreise K, K_1 berührt.

Analyse: Die Aufgabe kann auf die fünfte zurückgeführt werden, und zwar mittelst eines dem gesuchten concentrischen Kreises, der eine zu MN in einem dem Radius von K_1 gleichen Abstand parallele Gerade berührt, durch den Mittelpunkt von K_1 geht, und einen mit der Summe oder der Differenz der Radien um den Mittelpunkt von K beschriebenen Kreis berührt.

Man erhält im Maximum acht Kreise.

10. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise K, K_1, K_2 berührt.

Analyse: Es seien r, r_1, r_2 bezüglich die Radien der gegebenen Kreise. Man beschreibe mit dem Radius $r_1 - r$ oder $r_1 + r$ einen dem Kreise K_1 concentrischen und mit dem Radius $r_2 - r$ oder $r_2 + r$ einen dem Kreise K_2 concentrischen Kreis. Ein Kreis O, welcher die beiden concentrischen berührt und durch den Mittelpunkt von K geht, hat mit dem gesuchten denselben Mittelpunkt. Somit ist die Aufgabe auf die sechste zurückgeführt.

Man erhält im Maximum acht Kreise.

B. Neuere Lösung.

Die sogenannte neuere Geometrie, aus welcher in Anhang 3, 9 u. 10 einige Abschnitte behandelt sind, liefert die Mittel zu einer anderen Lösung des Berührungsproblems.

Der Kürze halber soll im Folgenden nur eine der zehn Aufgaben auf die neuere Weise behandelt werden, und wir wählen dazu die letzte, da dieselbe als Muster für die übrigen dienen kann, welche sie in gewissem Sinne als besondere Fälle enthält, wenn man den Punkt und die Gerade als Grenzen eines Kreises betrachtet, dessen Radius von Null bis Unendlich zunimmt.

Erklärungen: Ein jeder Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise (Anhang 3) hat in Beziehung auf jeden von diesen seine Polare (Anhang 10, Nr. 9). Die beiden Polaren des äußeren Aehnlichkeitspunktes nennt man die äußeren, die des inneren Aehnlichkeitspunktes die inneren Aehnlichkeitspolaren der Kreise. Wie construirt man dieselben?

Lehrsatz 1. Berührt ein Kreis O zwei andere Kreise K, K^1, so sind die beiden Berührungspunkte potenzhaltende Punkte in Beziehung auf einen Aehnlichkeitspunkt der Kreise K, K^1, oder die Verbindungslinie der Berührungspunkte geht durch den Aehnlichkeitspunkt.

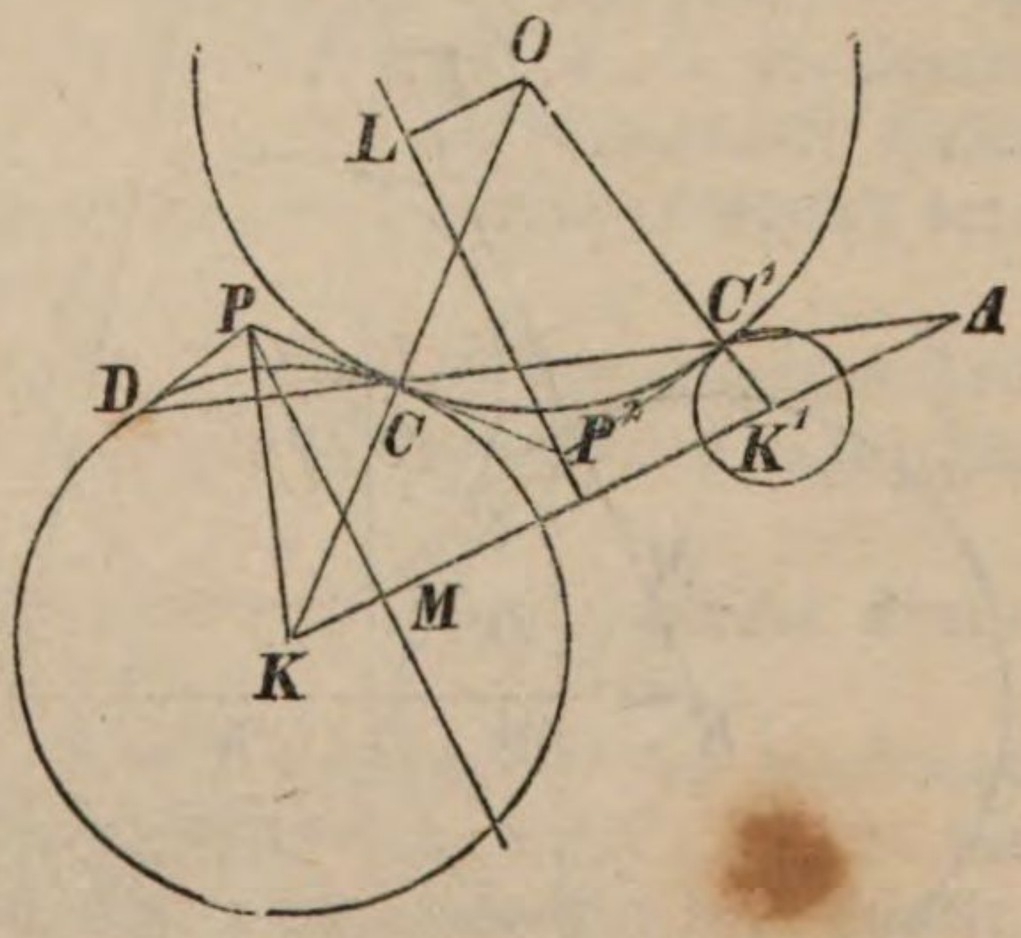
Dieser Aehnlichkeitspunkt ist der innere oder äußere, je nachdem O die Kreise K, K^1 ungleichartig oder gleichartig berührt.

Vergl. Anhang 3, Nr. 18 und die sechste Berührungs-Aufgabe nach der älteren Lösung.

Erklärung: Derjenige Aehnlichkeitsstrahl zweier Kreise, auf welchem ihre Berührungspunkte mit einem dritten Kreise liegen, heißt ein Berührungsstrahl derselben.

Lehrsatz 2. Werden zwei Kreise K, K^1 von einem dritten O gleichartig berührt, so geht jede ihrer äußeren Aehnlichkeitspolaren durch den Pol des Berührungsstrahls für denselben Kreis.

Denn berührt O den Kreis K in C, K^1 in C^1, und schneidet der Aehnlichkeitsstrahl $A\,C^1\,C$ die Peripherie von K zum zweiten Mal in D, so sind die in D und C an K gelegten Tangenten DP und CP die Polaren der Punkte D und C. Da nun der Aehnlichkeitspunkt A mit C und D in gerader Linie liegt, so schneiden sich die Polaren dieser drei Punkte in einem einzigen Punkte P, oder die Aehnlichkeitspolare für den Kreis K geht durch den Punkt P. Dieser ist aber der Pol der Berührungssehne DC von P, oder des Aehnlichkeitsstrahls AC für den Kreis K.



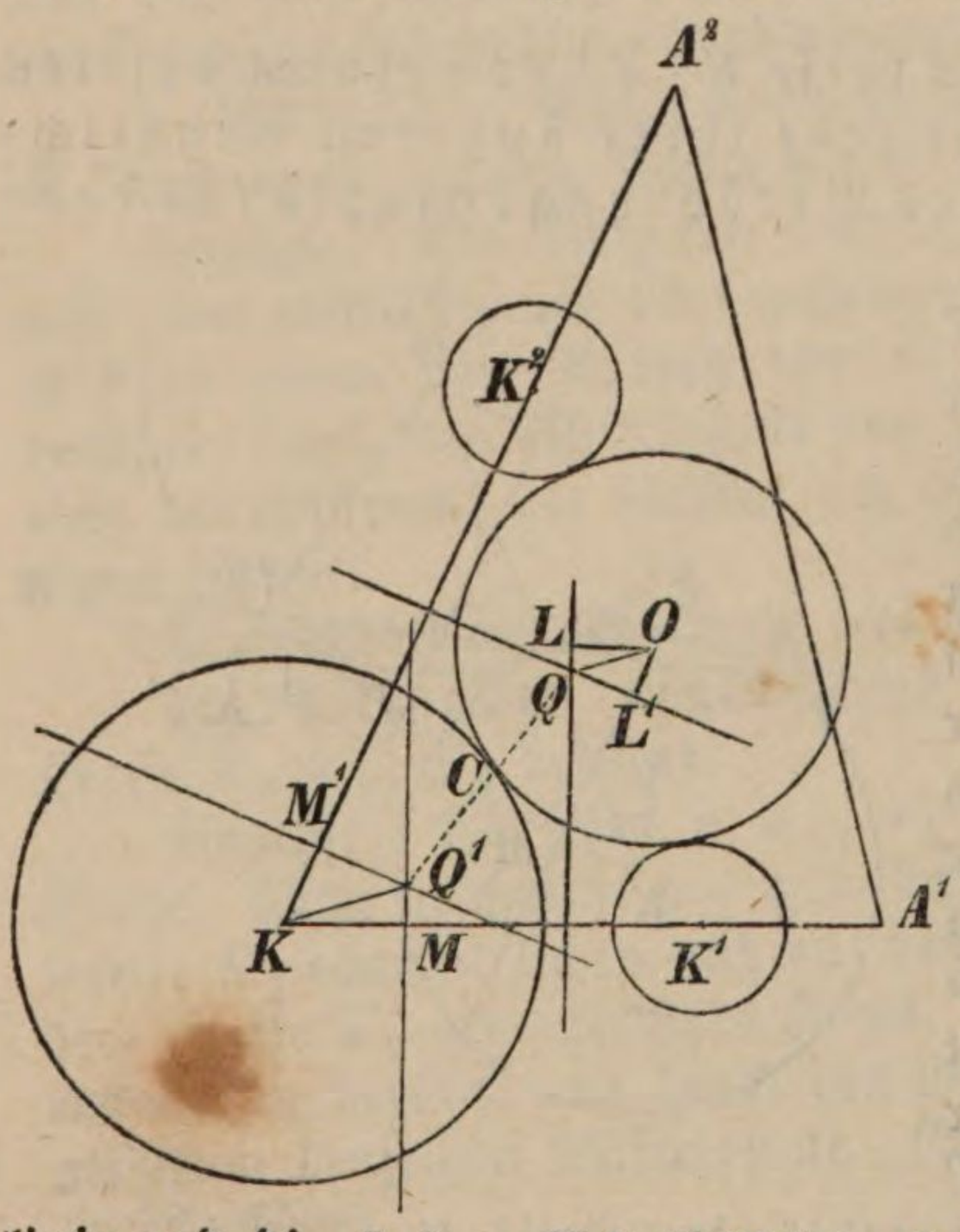
Lehrsatz 3. Werden zwei Kreise K, K^1 von einem dritten O ungleichartig berührt, so geht jede ihrer inneren Aehnlichkeitspolaren durch den Pol des Berührungsstrahls für denselben Kreis.

Beweis ähnlich wie vorher.

Lehrsatz 4. Werden zwei Kreise K, K^1 von einem dritten O gleichartig berührt, so verhält sich die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt O und der Potenzlinie von K und K^1 zu der Entfernung zwischen dem Mittelpunkt K (oder K^1) und der äußeren Aehnlichkeitspolare für K (oder K^1), wie der Radius ϱ von O zu dem Radius r (r_1) von K (K^1).

Beweis: Die in den Berührungspunkten C, C^1 an O gelegten Tangenten schneiden sich in einem Punkte P^2 der Potenzlinie von K und K^1. (Anhang 10, Nr. 3.) Ist also P^2L senkrecht zur Axe KK^1, so ist P^2L diese Potenzlinie. Die Aehnlichkeitspolare PM steht in M ebenfalls senkrecht zu KK^1, ist also parallel zu P^2L. Zieht man nun KP, $LO \perp P^2L$ und OP^2, so ist $LO \parallel KM$, und da OP^2 senkrecht zu der Berührungssehne CC^1 des Punktes P^2 für den Kreis O und ebenso KP senkrecht zu CD steht, so ist $KP \parallel OP^2$, daher $\triangle KPM \backsim LOP^2$, also $KM : LO = KP : OP^2$, oder (wenn man die Gerade KCO zieht) gleich $KC : OC = r : \varrho$.

Lehrsatz 5. Werden zwei Kreise K, K^1 von einem dritten O ungleichartig berührt, so verhält sich die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt O und der Potenzlinie von K und K^1 zu der Entfernung zwischen dem Mittelpunkt eines der letzteren Kreise und seiner inneren Aehnlichkeitspolare, wie der Radius von O zum Radius des letzteren Kreises.



Beweis ähnlich, wie vorher.

Lehrsatz 6. Werden drei Kreise K, K^1, K^2 von einem vierten O gleichartig berührt, so liegt der Potenzpunkt der ersteren mit jedem der Berührungspunkte und dem Pole ihrer äußeren Aehnlichkeitsaxe (Anhang 3, Nr. 17) für den in diesem Punkte berührten Kreis in gerader Linie.

Beweis: Man construire die Potenzlinie von K und K^1 und die äußere Aehnlichkeitspolare der Kreise K, K^1 im Kreise K und mache OL senkrecht zu der ersteren, KM senkrecht zu der letzteren Linie. Ebenso construire man die Potenzlinie und die äußere Aehnlichkeitspolare für K und K^2 und ziehe in ent-

sprechender Weise die Senkrechten OL^1, KM^1. Der Durchschnittspunkt Q der Potenzlinien ist der Potenzpunkt von K, K^1 und K^2, der Durchschnittspunkt Q^1 der Aehnlichkeitspolaren ist der Pol der äußeren Aehnlichkeitsaxe. Nun sind die Seiten des Vierecks KMQ^1M^1 paarweise den Seiten des Vierecks $OLQL^1$ parallel und es ist $KM : OL = KM^1 : OL^1 = r : \varrho$. Man zeige, daß auch $KQ^1 \parallel OQ$ und $KQ^1 : OQ = r : \varrho$ sein muß, woraus folgt, daß Q^1CQ eine Gerade ist.

Lehrsatz 7. Werden drei Kreise von einem vierten ungleichartig berührt, so liegt der Potenzpunkt der ersteren in gerader Linie mit jedem der Berührungspunkte und dem Pole einer der inneren Aehnlichkeitsaxen für den in diesem Punkte berührten Kreis. Die innere Aehnlichkeitsaxe ist in jedem einzelnen Fall diejenige, welche den äußeren Aehnlichkeitspunkt derjenigen beiden Kreise enthält, die von dem vierten gleichartig berührt werden, also z. B., wenn O den Kreis K von innen, die Kreise K^1, K^2 von außen berührt, diejenige, welche durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt von K^1 und K^2 geht.

Beweis ähnlich, wie zu dem vorigen Satz.

Lehrsatz 8. Werden drei Kreise K, K^1, K^2 von einem vierten O berührt, so schneiden die drei für die ersteren Kreise construirten Polaren ihres Potenzpunktes eine der vier Aehnlichkeitsaxen in drei solchen Punkten, daß jede von einem derselben an den zugehörigen Kreis gezogene Tangente diesen in seinem Berührungspunkt mit dem vierten Kreise O trifft.

Beweis: Ist Q der Potenzpunkt der Kreise K, K^1, K^2, C der Berührungspunkt von K mit O, und Q^1 der Pol der betreffenden Aehnlichkeitsaxe A^1A^2, so liegen nach Lehrsatz 6 und 7 dieses Abschnittes die Punkte Q, C, Q^1 in gerader Linie, also gehen die Polaren derselben für den Kreis K (Anhang 10 Nr. 9) durch einen Punkt. Die Polare für C ist die durch C gehende gemeinschaftliche Tangente der Kreise K, O, die Polare von Q^1 ist die Aehnlichkeitsaxe A^1A^2. Der Durchschnittspunkt dieser letzteren mit der Polare von Q ist also zugleich der Durchschnittspunkt derselben mit der durch C gehenden Tangente von K.

Welche der Aehnlichkeitsaxen der Kreise K, K^1, K^2 im einzelnen Fall zu wählen ist, hängt, wie in Lehrsatz 6 und 7 dieses Abschnittes angegeben ist, von der Art der Berührungen ab.

Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise berühre.

Construction: Man construire den Potenzpunkt Q der gegebenen Kreise K, K^1, K^2 und eine ihrer Aehnlichkeitsaxen A^1A^2, sodann die Polare von Q für einen der gegebenen Kreise K und ziehe von dem Punkte, in welchem diese die Aehnlichkeitsaxe trifft, eine Tangente an diesen Kreis K. Der Berührungspunkt C dieser Tangente ist zugleich der Berührungspunkt zwischen dem Kreis K und dem gesuchten O. Der Mittelpunkt des letzteren

ist der Durchschnittspunkt einer durch C und den Mittelpunkt K gehenden Geraden mit einem von Q auf $A^1 A^2$ gefällten Perpendikel.

Der Beweis ergiebt sich aus dem vorstehenden Lehrsatz. Daß $QO \perp A^1A^2$ ist, folgt daraus, daß $QO \parallel KQ^1$ und $KQ^1 \perp A^1A^2$ ist.

Nimmt man für A^1A^2 die äußere Aehnlichkeitsaxe, so berührt der gesuchte Kreis die gegebenen gleichartig, nimmt man eine der inneren Aehnlichkeitsaxen, so berührt O diejenigen Kreise gleichartig, deren äußerer Aehnlichkeitspunkt auf dieser Aehnlichkeitsaxe liegt, den dritten ungleichartig. Für jede der vier Aehnlichkeitsaxen ergeben sich, da man von dem auf derselben bestimmten Punkte zwei Tangenten an K ziehen kann, im Allgemeinen zwei Auflösungen. Liegen die Mittelpunkte der gegebenen Kreise in einer Geraden, so ist die Construction abzuändern; doch kann hierauf an dieser Stelle, wie auch auf die weitere Ausführung dieser Art der Auflösung, der Kürze halber nicht näher eingegangen werden.

C. Anwendung geometrischer Oerter auf das Apollonische Problem.

Nimmt man an, daß statt dreier Kreise, Linien oder Punkte nur zwei solche gegeben sind, so ist die Aufgabe, den zugehörigen Berührungskreis zu construiren, eine unbestimmte, und man erhält daher einen geometrischen Ort für den Mittelpunkt. Im Einzelnen ergiebt sich:

1) Der geometrische Ort des Mittelpunkts eines Kreises, der durch zwei gegebene Punkte P, P^1 geht, ist die auf der Geraden PP^1 in ihrer Mitte senkrecht stehende Gerade.

2) Der geometrische Ort des Mittelpunkts eines Kreises, welcher durch einen gegebenen Punkt P geht und eine gegebene Gerade MN berührt, ist eine krumme Linie, welche eine Parabel genannt wird. Nimmt man auf MN beliebige Punkte B, B^1, B^2 ... als Berührungspunkte an, so ergeben sich eben so viele Punkte der Parabel, als Durchschnittspunkte der in B, oder B^1 u. s. w. auf MN senkrechten Geraden mit den Mittelsenkrechten der je zugehörigen Linien PB, PB^1 u. s. w. Hiernach kann man die Parabel mittelst einer hinreichenden Anzahl von Punkten derselben näherungsweise construiren.

3) Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher durch einen gegebenen Punkt P geht und einen gegebenen Kreis K berührt, ist a) wenn P außerhalb K liegt, eine krumme Linie, welche eine Hyperbel genannt wird und aus zwei einzelnen Linien besteht, b) wenn P innerhalb K liegt, eine krumme Linie, welche eine Ellipse genannt wird, c) wenn P auf der Peripherie von K liegt, eine Gerade.

Nimmt man auf K beliebige Punkte als Berührungspunkte an, so erhält man mittelst zweier gerader Oerter ebenso viele Punkte der Ellipse oder Hyperbel.

4) Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei gegebene gerade Linien berührt, wird von den zwei die Winkel dieser Geraden halbirenden Linien, oder, wenn letztere parallel sind, von der zu beiden in gleichem Abstand parallelen Geraden gebildet.

5) Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der eine

gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt, wird von zwei Parabeln gebildet. Berührt die Gerade den Kreis, so verwandelt sich die eine Parabel in eine Gerade.

6) Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei gegebene Kreise berührt, besteht a) wenn diese Kreise ganz außerhalb einander liegen, aus zwei vollständigen Hyperbeln, b) wenn die Kreise sich von außen berühren, aus einer Geraden und einer vollständigen Hyperbel, c) wenn die Kreise sich schneiden, aus einer vollständigen Hpperbel und einer Ellipse, d) wenn die Kreise sich von innen berühren, aus einer Geraden und einer Ellipse, e) wenn der eine Kreis ganz innerhalb des anderen liegt, aus zwei Ellipsen.

Ist man im Stande, die im Vorstehenden aufgezählten geometrischen Oerter zu construiren, so kann man jede der zehn bestimmten Aufgaben des Apollonischen Problems der Kreisberührungen durch diese Linien lösen. Man erhält für jede Aufgabe drei geometrische Oerter des Mittelpunktes, und somit, da man dieselben auf drei verschiedene Arten zu je zweien verbinden kann, drei Formen der Auflösung. Nebenbei erhält man durch die Behauptung, daß die drei Oerter sich in einem Punkte schneiden müssen, mehrere Lehrsätze.

Die drei krummen Linien, Parabel, Ellipse und Hyperbel führen (aus stereometrischen Gründen) den Namen Kegelschnitte. Ihre wichtigsten Eigenschaften sind im folgenden Anhang behandelt.

Anhang 12. Die Kegelschnitte.

A. Die Parabel.

1) Erklärungen: Der geometrische Ort eines Punktes P, der von einem festen Punkt F dieselbe Entfernung hat, wie von einer festen Geraden MN, heißt eine Parabel. Der Punkt F heißt der Brennpunkt, die Gerade MN die Leitlinie derselben. Jede Gerade, welche den Brennpunkt mit einem Punkt der Parabel verbindet, wird ein Radiusvector (Brennstrahl), die durch F gehende, zur Leitlinie senkrechte Gerade die Axe, jede durch einen Punkt der Parabel gehende, zu der Axe parallele Gerade ein Durchmesser (Parallelstrahl) genannt. Die Benennungen Sehne, Secante, Tangente haben entsprechende Bedeutungen wie bei dem Kreise.

Aufgabe: Beliebig viele Punkte einer Parabel zu construiren, wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind. A. 12. A. 7.

Lehrsatz: Die Parabel schneidet ihre Axe in der Mitte zwischen dem Brennpunkt und der Leitlinie.

Erklärung: Dieser Durchschnittspunkt heißt der Scheitel der Parabel.

Lehrsatz: Alle Punkte der Parabel liegen auf derjenigen Seite der Leitlinie, auf welcher der Brennpunkt liegt. L. 22.

Lehrsatz: Jedem Punkte P einer Parabel entspricht ein zweiter Punkt P^1 derselben, so daß PP^1 senkrecht zur Axe steht und von dieser halbirt wird. L. 31. 12. 43, Zus. 2.

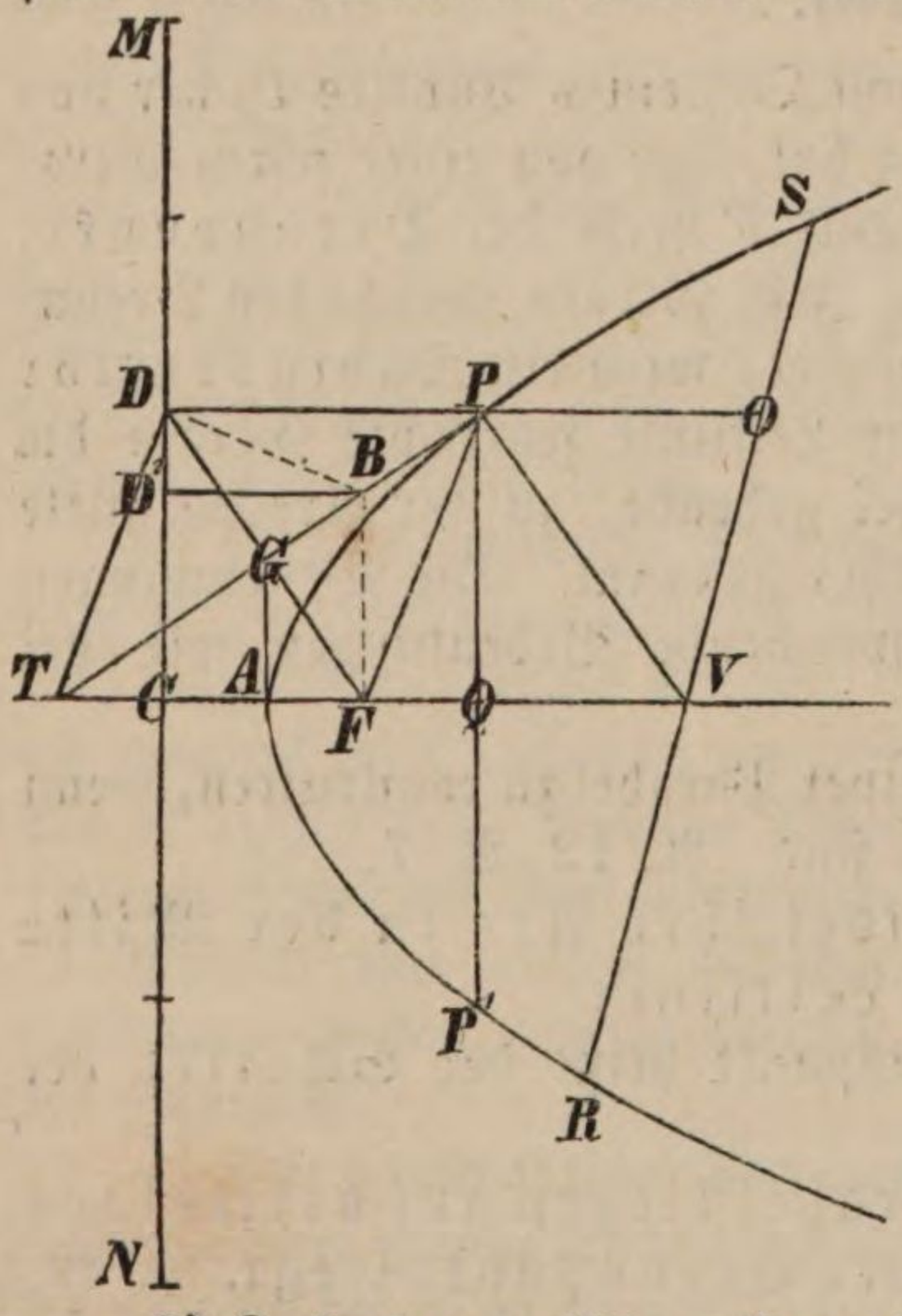
Zusatz: Jede zur Axe senkrechte Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, welche gleich weit von der Axe abstehen, oder die Axe theilt die Parabel in zwei gegen dieselbe symmetrisch liegende Aeste. Dieselbe Gerade kann keinen dritten Punkt mit der Parabel gemein haben. Die beiden Punkte haben gleiche Radienvectoren.

Lehrsatz: Bezeichnet y den Abstand PQ eines Punktes der Parabel von der Axe, A den Scheitel, C den Durchschnittspunkt der Axe mit der Leitlinie, und setzt man $AQ = x$, so ist $y^2 = 2CF \cdot x = 4AF \cdot x$. — Zum Beweise ziehe man PD senkrecht zu MN, so wie PF, so ist $PD = x + AF$, $PF^2 = y^2 + (x - AF)^2$, u. s. w.

Erklärung: Die Linie PQ heiße die Ordinate, AQ die Abscisse des Punktes P, eine Linie $p = 4AF$ der Parameter und die Gleichung $y^2 = px$, oder $y = \sqrt{px}$ die Gleichung der Parabel.

Zusätze: 1) Die Ordinate ist das geometrische Mittel aus der zugehörigen Abscisse und dem Parameter. 2) Die Quadrate der Ordinaten einer Parabel verhalten sich, wie die zugehörigen Abscissen. 3) Die zur Axe senkrechte, durch den Brennpunkt gehende Sehne ist gleich dem Parameter. 4) Die Ordinaten der Parabel werden um so größer, je größer die Abscissen werden; sie wachsen mit diesen ins Unendliche. 5) Zu jeder Abscisse gehören zwei an Länge einander gleiche, der Lage nach einander entgegengesetzte Ordinaten. 6) Jeder Punkt P, dessen Abstand y von der Axe der Gleichung $y^2 = px$ genügt, in welcher die Bedeutung von p und x die oben erklärte ist, ist ein Punkt der Parabel.

Lehrsatz: Jede zur Axe parallele Gerade schneidet die Parabel in einem und nur in einem Punkte.



Lehrsatz: Eine beliebige Gerade kann die Parabel in nicht mehr als zwei Punkten schneiden.

Denn nimmt man einen beliebigen dritten Punkt O auf einer solchen Geraden SR an und zieht durch ihn eine Parallele zur Axe, welche die Leitlinie in D treffe, so muß die Parallele die Parabel in einem Punkte P treffen, und es ist $PD = PF$, daher $DO = PD \pm PO = PF \pm PO$, nicht gleich FO.

Eine Parabel ist also eine aus zwei zur Axe symmetrischen, vom Scheitel aus nach derselben Seite der Leitlinie bis ins Unendliche divergirenden Theilen (Aesten) bestehende krumme Linie, welche also auch nicht in sich selbst zurückkehrt.

3) Lehrsatz: Eine Gerade, welche den Nebenwinkel eines Radiusvector und des zu demselben gehörigen Durchmessers halbirt, ist eine Tangente der Parabel.

Denn nimmt man auf der durch P gehenden, den Winkel DPF halbirenden Geraden PT einen beliebigen anderen Punkt B an und zieht BD, BF, sowie BD' senkrecht zur Leitlinie, so ist $\triangle PBD \cong PBF$, daher $BD = BF$, also BD' nicht gleich BF.

Erklärung: Eine zu einer Tangente PT in ihrem Berührungspunkt P senkrechte und von diesem und der Axe begrenzte Gerade PV heißt die Normale des Punktes P. Ist T der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe, Q der Fußpunkt der Ordinate von P, so heißt PT die Tangente (als begränzte Linie, oder Länge), TQ die Subtangente, VQ die Subnormale des Punktes P.

Zusatz 1: Die Normale eines Punktes der Parabel halbirt den von dem zugehörigen Durchmesser und dem Radiusvector dieses Punktes gebildeten Winkel.

Anmerkung: Anwendung dieses Satzes auf die physikalische Theorie der Reflexion des Lichtes. Paraboloidische Hohlspiegel. Entstehung der Benennungen Brennpunkt und Brennstrahl.

Zusatz 2: Jede Tangente einer Parabel steht senkrecht zu der Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Durchschnittspunkt des durch den Berührungspunkt gehenden Durchmessers und der Leitlinie.

Zusatz 3: Die aus dem Brennpunkt einer Parabel auf eine Tangente derselben gefällte Senkrechte FG schneidet letztere auf einer im Scheitel senkrecht zur Axe errichteten Geraden. Denn $FA : AC = FG : GD$.

Zusatz 4: Verbindet man den auf der Axe liegenden Endpunkt T der Tangente PT mit dem Durchschnittspunkt D des zu P gehörigen Durchmessers und der Leitlinie, so entsteht ein gleichseitiges Parallelogramm $PDTF$.

4) Lehrsatz: Die Subtangente QT eines Punktes P einer Parabel ist gleich der doppelten Abscisse desselben.

Denn $PF \parallel DT$, daher $\triangle PQF \cong DCT$, also $QF = TC$, $TQ = CF + 2FQ = 2AQ$.

Lehrsatz: Die Subnormale QV eines Punktes P einer Parabel ist gleich der Hälfte des Parameters.

Denn $PV \parallel FD$, also $\triangle PQV \cong DCF$, also $QV = CF$.

Zusatz: Dieselbe hat also für alle Punkte der Parabel denselben Werth.

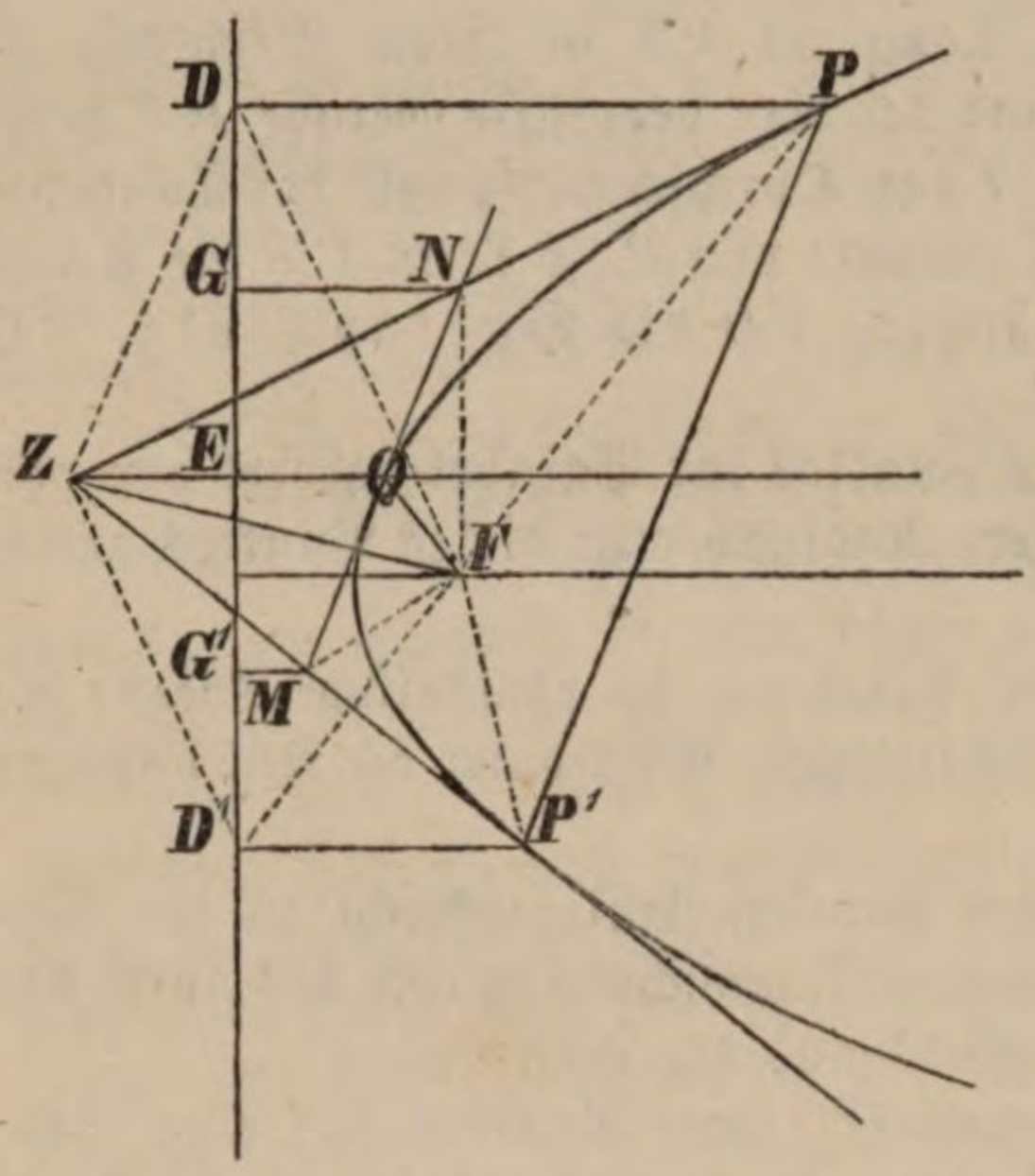
Lehrsatz: Die Tangente PT eines Punktes P einer Parabel ist mittlere geometrische Proportionale zwischen der doppelten Abscisse und dem doppelten Radiusvector dieses Punktes.

Lehrsatz: Die Normale PV eines Punktes P einer Parabel ist mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Radiusvector dieses Punktes und dem Parameter.

Zusätze: Es ist also die Subtangente gleich $2x$, die Subnormale gleich $\frac{1}{2}p$, die Tangente gleich $2\sqrt{x\,(x + \frac{1}{4}p)}$, die Normale gleich $\sqrt{p\,(x + \frac{1}{4}p)}$.

5) Lehrsatz: Sind von einem Punkte Z zwei Tangenten ZP, ZP^1 an eine Parabel gezogen, so ist der Punkt Z von

dem Brennpunkt F der Parabel und von den beiden Durchschnittspunkten D, D^1 der durch die Berührungspunkte P, P^1 gehenden Durchmesser mit der Leitlinie gleich weit entfernt.



Zum Beweis ziehe man PF, DF und P^1F, D^1F. Vergl. Nr. 3 dieses Anhangs). Z ist der Mittelpunkt des durch D, D^1 und F gehenden Kreises.

Zusätze: 1. Der durch Z gehende Parallelstrahl schneidet die Leitlinie in einem Punkte E, so daß $DE = D^1E$ ist.

2. Zieht man ZD, ZD^1, so ist $\triangle ZDP \cong ZFP$, $\triangle ZD^1P^1 \cong ZFP^1$. Daher ist $\sphericalangle ZDP = ZFP$, $\sphericalangle ZD^1P^1 = ZFP^1$. Ferner ist $\sphericalangle ZDE = ZD^1E$, also $\sphericalangle ZDP = ZD^1P^1$, daher auch $\sphericalangle ZFP = ZFP^1$, oder die Linie ZF bildet mit den Radienvectoren der Berührungspunkte gleiche Winkel.

3. Zieht man zwischen den Tangenten ZP, ZP^1 eine dritte MN, so hat der Winkel NFM am Brennpunkt für jede beliebige Lage von MN dieselbe Größe; er beträgt nämlich die Hälfte des Winkels PFP^1.

Denn ist Q der Berührungspunkt von NM, so ist, da von M die Tangenten MQ, MP^1 an die Parabel gehen, $\sphericalangle MFQ = MFP^1$ und ebenso $QFN = NFP$, daher $\sphericalangle MFN = MFQ + QFN = \frac{1}{2} P^1FP$.

4. Ist durch den Durchschnittspunkt Z der Tangenten ZP, ZP^1 der Durchmesser ZQ gezogen, so bilden die Tangenten mit diesem und dem durch Z gehenden Radiusvector gleiche Winkel.

Denn da $\sphericalangle ZFP^1 = ZFP$, so ist $\sphericalangle FZP^1 + FP^1Z = FZP + FPZ$. Nun ist $\sphericalangle FP^1Z = ZP^1D^1 = QZP^1$ und $\sphericalangle FPZ = DPZ = PZQ$, also $\sphericalangle FZP^1 + QZP^1 = FZP + PZQ$, oder, wenn PZQ durch α, QZF durch β, FZP^1 durch γ bezeichnet wird, $\gamma + \gamma + \beta = \beta + \alpha + \alpha$, oder $2\gamma = 2\alpha$, $\gamma = \alpha$.

5. Wird zwischen den Tangenten ZP und ZP^1 durch den Durchschnittspunkt Q des Parallelstrahls ZQ mit der Parabel eine Tangente NM gezogen, so wird diese in Q halbirt.

Denn es ist nach dem ersten Zusatz $DE = D^1E$, und wenn von N und M bezüglich die Senkrechten NG, MG^1 auf die Leitlinie gefällt werden, so ist in gleicher Weise $DG = GE$ und $D^1G^1 = G^1E$, daher $DG = GE = G^1E = D^1G^1 = \frac{1}{4} DD^1$. Da nun $MQ : NQ = G^1E : GE$, so ist $MQ = NQ$.

6. Die Tangente MN halbirt die beiden Tangenten ZP und ZP^1.

Lehrsatz: Verbindet man die Berührungspunkte P, P^1 zweier von einem Punkte Z an eine Parabel gezogenen Tan-

genten durch eine Sehne, und zieht durch Z den Parallelstrahl ZQ, welcher die Parabel in Q trifft, so ist die in Q an die Parabel gelegte Tangente der Sehne PP^1 parallel.

Denn $ZN : NP = ZM : MP^1$.

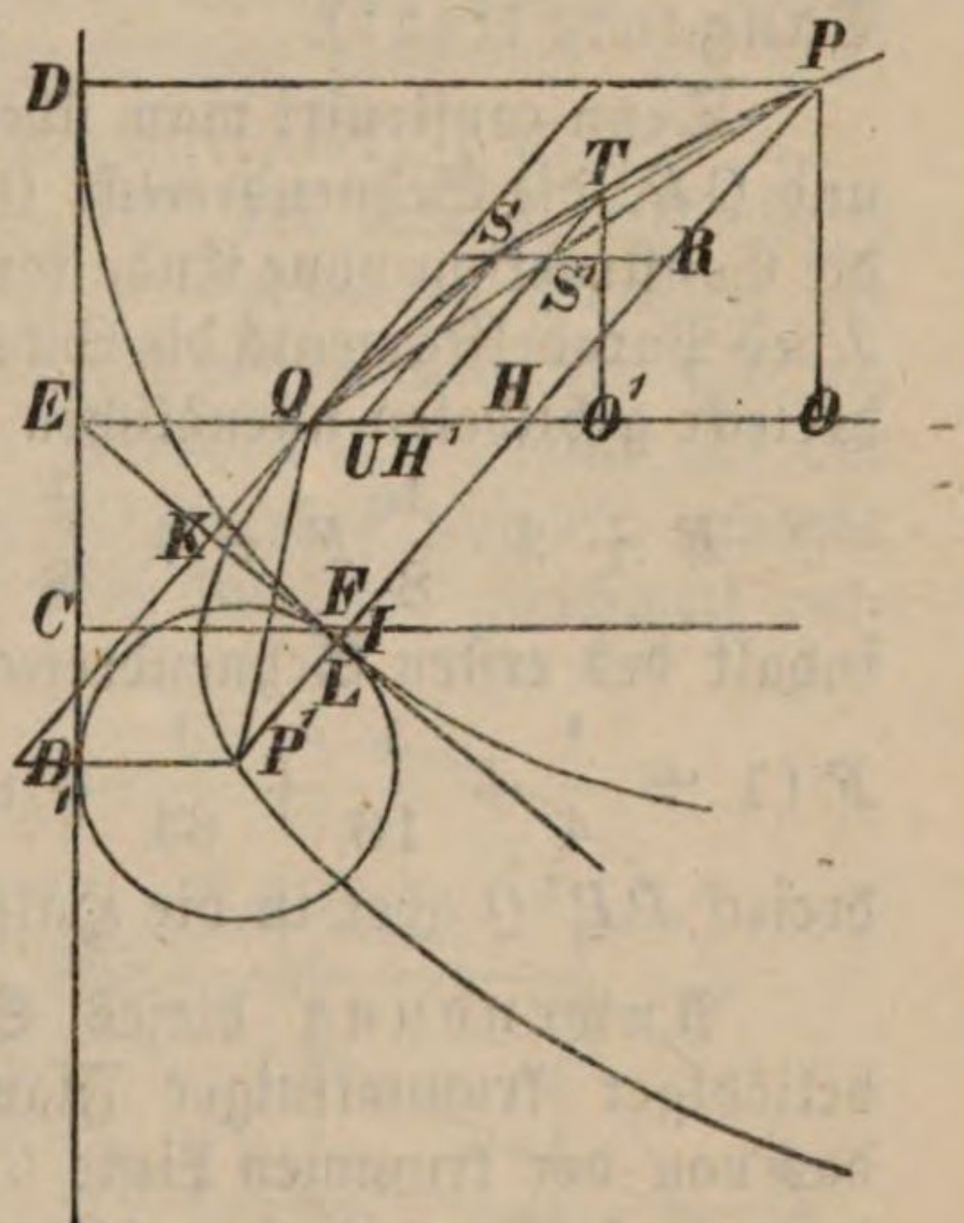
Zusatz: Die Sehne PP^1 wird durch den Parallelstrahl ZQ halbirt.

Lehrsatz: Umgekehrt werden alle Sehnen, welche einer Tangente der Parabel parallel sind, von dem durch den Berührungspunkt der Tangente gehenden Durchmesser halbirt.

Welche Sehnen sind der durch den Scheitel der Parabel gehenden Tangente parallel? Welcher frühere Satz ist demnach ein besonderer Fall des vorstehenden?

Lehrsatz: Für jeden Durchmesser der Parabel verhalten sich die Quadrate der Hälften der von ihm halbirten Sehnen wie die zugehörigen Entfernungen ihrer Halbirungspunkte vom Scheitel des Durchmessers (d. i. von seinem Durchschnittspunkt mit der Parabel).

Beweis: Man beschreibe um P mit PF und um P^1 mit P^1F einen Kreis. Die beiden Kreise müssen die Leitlinie beziehentlich in D und D^1 berühren und einander in zwei Punkten F und J schneiden. Man kann nun leicht zeigen, daß die gemeinschaftliche Secante FJ die Leitlinie im Halbirungspunkt E von DD^1, also mit dem Parallelstrahl QH, welcher die Sehne PP^1 halbirt, in demselben Punkte treffen muß. Ferner sei K der Durchschnittspunkt der in Q an die Parabel gelegten, zu PP^1 parallelen Tangente mit EF, L der Durchschnittspunkt von PP^1 mit EF und H der Halbirungspunkt von PP^1. Es ist $FL = LJ$, $EK = KF$ und QK und PP^1 sind senkrecht zu EF. Daher ist $QH : KL = EQ : EK = EF : CF$, $QH . CF = KL . EF = \frac{1}{2} EJ . EF = \frac{1}{2} ED^2$. Ist nun $PO \perp EH$, also $PO = DE$, so ist $QH = \frac{PO^2}{2CF}$.



Es sei TT^1 eine zweite, PP^1 parallele Sehne, welche EH in H^1 schneide, und es sei $TO^1 \perp EH$, so ist ebenso $QH^1 = \frac{TO^{1\,2}}{2CF}$, daher $QH : QH^1 = PO^2 : TO^{1\,2}$, oder, da $PO : TO^1 = PH : TH^1$, auch $QH : QH^1 = PH^2 : TH^{1\,2}$.

Zusätze: Betrachtet man PH als Ordinate, QH als Abscisse des Punktes P in Beziehung auf den Durchmesser QH, so verhalten sich also auch hier die Quadrate der Ordinaten, wie die zugehörigen Abscissen. — Da $2CF = p$, so ist $PO^2 = p . QH$. — Wird durch die Mitte R der Ordinate PH die Gerade RS parallel zum Durchmesser QH, bis zum

Durchschnitt mit der Parabel gezogen, so ist dieselbe gleich drei Viertel der Abscisse QH. Denn es ist

$$\frac{PH^2}{SU^2} = \frac{QH}{QU}; \quad \frac{PH^2 - SU^2}{SU^2} = \frac{QH - QU}{QU} = \frac{UH}{QU}, \text{ oder}$$

$$\frac{3SU^2}{SU^2} = \frac{UH}{QU}; \text{ also } \frac{SR}{QU + UH} = \tfrac{3}{4}, \text{ d. i. } \frac{SR}{QH} = \tfrac{3}{4}.$$

6) Lehrsatz: Verbindet man die Endpunkte P, P^1 einer Sehne der Parabel mit dem Scheitel Q des dieselbe halbirenden Durchmessers, construirt man dann über der einen Verbindungslinie QP als Sehne in gleicher Weise ein Sehnendreieck QSP, so ist das Dreieck PQP^1 achtmal so groß als das Dreieck QSP.

Denn schneidet der Durchmesser SR die Sehne QP^1 in S^1 und PP^1 in R, so ist wegen $QS^1 = S^1P$, auch $HR = RP$, daher $SR = \frac{3}{4} QH$. Nun ist $S^1R = \frac{1}{2} QH$, also $SS^1 = \frac{1}{4} QH$, demnach $\triangle SPS^1 : PS^1R = 1:2$. Es ist aber $\triangle PS^1R = \frac{1}{4} PQH = \frac{1}{8} PQP^1$, und $\triangle SPS^1 = \frac{1}{2} QSP$, also $QSP = 2 \cdot SPS^1 = \frac{1}{2} PS^1R = \frac{1}{8} PQP^1$.

Lehrsatz: Der Flächeninhalt eines Parabelsegments PP^1Q beträgt zwei Drittel des auf seiner Sehne PP^1 errichteten, dem Segment umbeschriebenen Parallelogramms (dessen PP^1 parallele Seite also auf der durch Q gehenden Tangente liegt).

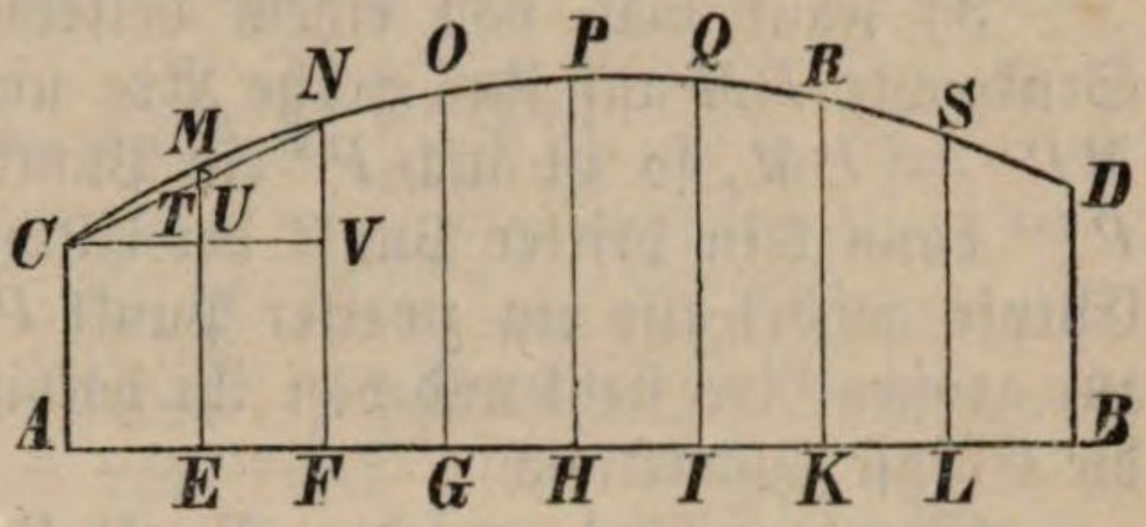
Denn construirt man über PP^1 das Sehnendreieck PQP^1, über PQ und QP^1 die Sehnendreiecke QSP, QS^2P^1, und denkt sich in dieser Weise die Construction ohne Ende fortgesetzt, so erhält man für den Flächeninhalt J des Parabelsegments die Summe der durch die Flächeninhalte der Sehnendreiecke gebildeten unendlichen Reihe

$$F + 2 \cdot \frac{1}{8} F + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} F + 8 \cdot \frac{1}{8^3} F + \text{ꝛc.}, \text{ worin } F \text{ den Flächeninhalt des ersten Sehnendreiecks } PP^1Q \text{ bedeutet, oder}$$

$$F\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \text{ꝛc.}\right), \text{ d. i. } F \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} F.$$ Das Sehnendreieck PP^1Q aber ist die Hälfte des genannten Parallelogramms.

Anwendung dieses Satzes zur Berechnung des Flächeninhalts beliebiger krummliniger Figuren (Simpson'sche Regel). Es sei z. B. das von der krummen Linie CD und der Geraden AB, sowie den zu letzterer senkrechten Linien AC und BD begrenzte Flächenstück zu berechnen. Theilt man AB in $2n$ gleiche Theile AE, EF, FG u. s. w., und errichtet in den Theilpunkten die Senkrechten EM, FN, GO u. s. w., so kann man, falls A, E, F, G hinreichend nahe an einander liegen, die Bögen CN, NP u. s. w. als Parabelbögen und M, O, u. s. w. als die Scheitel derselben betrachten. Bezeichnet man AE, EF, FG u. s. w. durch b und die Ordinaten AC, EM, FN, GO u. s. w. durch a_1, a_2, a_3, a_4, ..., so ist demnach näherungsweise: $ACMNF = F_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) \cdot 2b +$

$\frac{2}{3} CN \cdot MU$. Nun ist $MU : MT = CV : CN$, also $CN \cdot MU = MT \cdot CV$, $MT = a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$, $CV = 2b$, also $F_1 = b \cdot (a_1 + a_3) + \frac{2}{3} \cdot 2b\,(a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_3)) = \frac{1}{3} b\,(a_1 + 4a_2 + a_3)$. Ebenso ist $F_2 = FNOPH = \frac{1}{3} b \cdot (a_3 + 4\,a_4 + a_5)$, u. s. w., also die ganze Fläche $ACDB$ gleich $F_1 + F_2 + \ldots = \frac{1}{3} b \cdot (a_1 + 2\,a_3 + 2\,a_5 + \ldots + 2 \cdot a_{2n-1} + a_{2n+1} + 4\,(a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n}))$



B. Die Ellipse.

1) Erklärung: Der geometrische Ort eines Punktes P, für welchen die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F, F^1 einen sich gleichbleibenden Werth $2a$ hat, heißt eine Ellipse.

Mechanische Construction der Ellipse, wenn die festen Punkte F, F^1 und die Länge von $2a$ gegeben sind, mittels eines in jenen Punkten befestigten Fadens. — Construction beliebig vieler Punkte der Ellipse durch Kreisbögen, deren Mittelpunkte F und F^1 sind und bei denen die Summe der Radien für je zwei zusammengehörige Kreise gleich $2a$ ist.

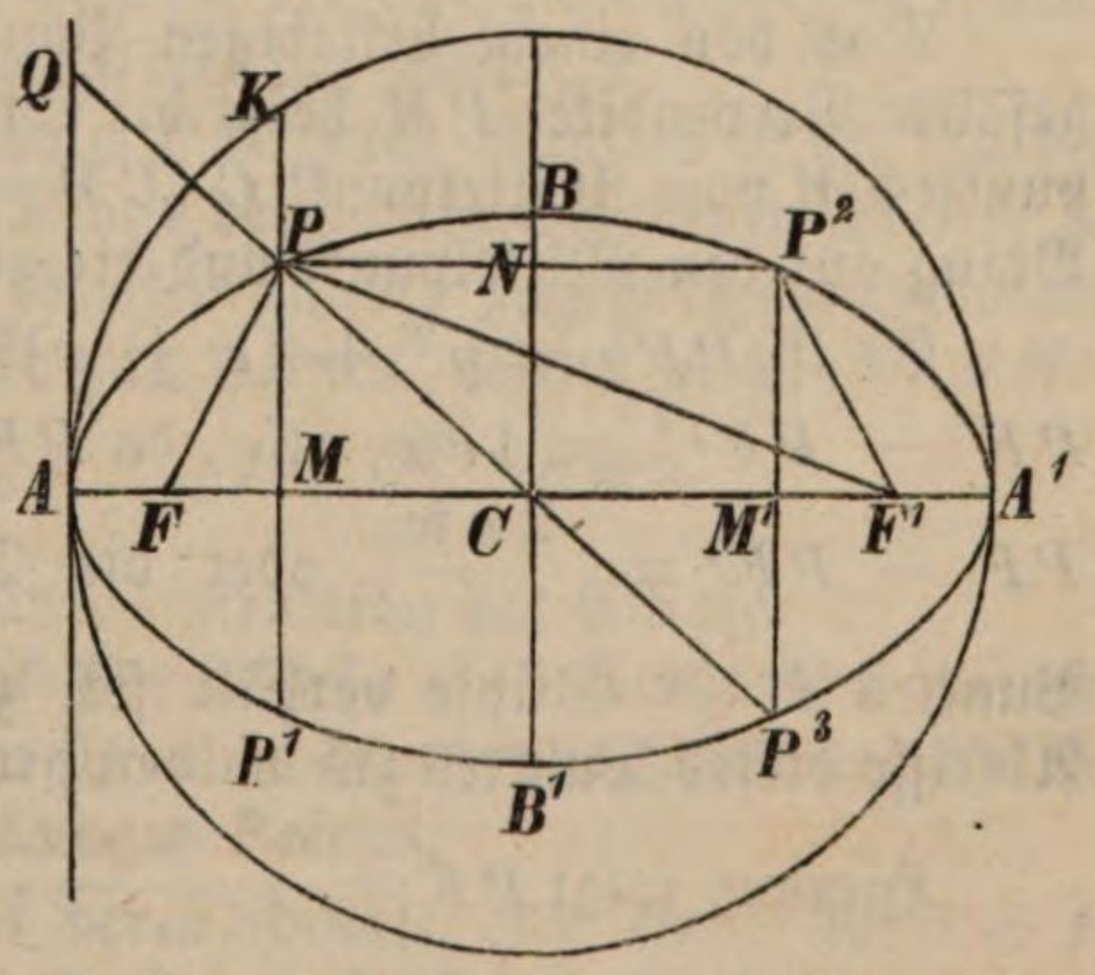
Die Punkte F, F^1 heißen die Brennpunkte, ihre halbe Entfernung von einander heißt die Excentricität, und jede Gerade, welche einen dieser Punkte mit einem Punkt P der Ellipse verbindet, ein Radiusvector der Ellipse. Bezeichnet c die Excentricität, so ist $c < a$.

2) Halbirt man die Verbindungslinie FF^1 der Brennpunkte in C und trägt von C aus auf der durch F und F^1 gehenden Geraden die Strecken $CA = CA^1 = a$ ab, so sind A und A^1 Punkte der Ellipse. Beweis leicht. — Kein anderer Punkt der Geraden FF^1 kann auf der Ellipse liegen. — Die Ellipse schneidet also die durch F und F^1 gehende Gerade in zwei Punkten A, A^1, welche von dem Punkte C gleichweit entfernt sind.

Die Gerade AA^1 heißt die große Axe, die Punkte A, A^1 heißen die Scheitel derselben. Der Punkt C wird der Mittelpunkt der Ellipse genannt.

Die große Axe einer Ellipse ist gleich der Summe der Radienvectoren eines jeden Punktes der Ellipse.

Errichtet man im Mittelpunkt C der Ellipse eine Senkrechte auf ihrer großen Axe, so trifft dieselbe die Ellipse in zwei Punkten B, B^1, so daß $BF = BF^1 = B^1F = B^1F^1 = a$ und $BC = B^1C$ ist. Beweis leicht.



Die Gerade BB^1 heißt die kleine Axe der Ellipse, B und B^1 sind ihre Scheitel.

Ist $AA^1 = 2a$, $BB^1 = 2b$, $FF^1 = 2c$, so ist $a^2 = b^2 + c^2$.

3) Fällt man von einem beliebigen Punkte P einer Ellipse eine Senkrechte PM auf ihre große Axe und verlängert dieselbe über M um $MP^1 = PM$, so ist auch P^1 ein Punkt der Ellipse. — Auf der Geraden PP^1 kann kein dritter Punkt der Ellipse liegen. — Zu jedem Punkt der Ellipse gehört also ein zweiter Punkt P^1 derselben, so daß PP^1 senkrecht zur großen Axe steht und von ihr halbirt wird, oder die große Axe theilt die Ellipse symmetrisch.

Ebenso gehört zu jedem Punkt P der Ellipse ein zweiter Punkt P^2, so daß PP^2 senkrecht zur kleinen Axe steht und von ihr halbirt wird. Zum Beweis fälle man PN senkrecht auf BB^1, mache $NP^2 = PN$ und ziehe $P^2M^1 \perp AA^1$, $PM \perp AA^1$. Es ist $\triangle PFM \cong P^2M^1F^1$, u. s. w. — Die kleine Axe theilt also ebenfalls die Ellipse symmetrisch.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Ellipse mit dem Mittelpunkt C und verlängert PC über C um $CP^3 = CP$, so ist P^3 ebenfalls ein Punkt der Ellipse. — Auf PP^3 kann kein dritter Punkt der Ellipse liegen. — Jede durch den Mittelpunkt C gezogene Gerade schneidet also die Ellipse in zwei Punkten, deren Abstand durch C halbirt wird.

Jede durch den Mittelpunkt einer Ellipse gehende und von zwei Punkten derselben begrenzte Gerade heißt ein Durchmesser derselben.

Zu jedem Punkte P der Ellipse gehören drei andere P^1, P^2, P^3, so daß die vier Punkte die Ecken eines Rechtecks bilden, dessen Seiten den Axen parallel und dessen Diagonalen Durchmesser der Ellipse sind.

4) Errichtet man in einem Scheitel A der großen Axe auf dieser eine Senkrechte, so liegen alle Punkte der Ellipse auf derjenigen Seite der Senkrechten, auf welcher die Brennpunkte liegen.

Man beweise, daß für jeden Punkt Q auf dieser Senkrechten, oder auf der anderen Seite derselben $QF + QF^1 > AF + AF^1$, oder $> 2a$ ist.

Die auf der großen Axe in ihren Endpunkten senkrechten Geraden berühren also die Ellipse und schließen dieselbe zwischen sich ein.

Das von einem beliebigen Punkte P der Ellipse auf die große Axe gefällte Perpendikel PM heißt die Ordinate (y), der Abstand seines Fußpunktes M vom Mittelpunkt C ($CM = x$) die Abscisse dieses Punktes in Bezug auf den Mittelpunkt und die große Axe.

Es ist $PF^2 = y^2 + (c \pm x)^2$, $PF^{1\,2} = y^2 + (c \mp x)^2$, daher $PF^2 - PF^{1\,2} = 4cx$, also, da $PF + PF^1 = 2a$ ist,

$PF - PF^1 = \frac{2cx}{a}$, oder die Differenz der Radienvectoren eines Punktes P der Ellipse verhält sich zur Excentricität, wie die doppelte Abscisse dieses Punktes zur halben großen Axe.

Hieraus folgt $PF = \frac{a^2 + cx}{a}$, $PF^1 = \frac{a^2 - cx}{a}$, also auch

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2y^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2, \text{ oder}$$
$$a^4 + c^2x^2 = a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2.$$

Setzt man hier $c^2 = a^2 - b^2$, so erhält man

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

welche Gleichung die Gleichung der Ellipse in Bezug auf den Mittelpunkt heißt und auch in den Formen

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ oder } y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

geschrieben werden kann.

Aus dieser Gleichung folgt:

Die Ordinaten y sind um so kleiner, je größer x ist, oder je näher P an einem der Scheitel liegt, und umgekehrt. Den größten Werth der Ordinate erhält man für $x = 0$, d. h., wenn die Ordinate mit der kleinen Axe zusammenfällt. — Daher liegen alle Punkte einer Geraden, welche durch einen Scheitel B der kleinen Axe parallel zu der großen gezogen wird (mit Ausnahme von B), außerhalb der Ellipse, oder diese Gerade berührt die Ellipse. — Die vier durch die Scheitel der beiden Axen an die Ellipse gezogenen Tangenten begränzen daher ein der Ellipse umbeschriebenes Rechteck. — Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie.

5) Aus dem Vorstehenden folgt ferner leicht:

Die Ordinate eines Brennpunktes ist vierte Proportionale zu der halben Hauptaxe und der halben Nebenaxe, oder gleich $\frac{b^2}{a}$.

Die vom Mittelpunkt C nach Punkten P der Ellipse führenden Geraden erhalten ihren größten Werth für die Scheitel der großen Axe; sie werden um so kleiner, je näher der Punkt P einem Scheitel der kleinen Axe liegt, und sie erhalten für diesen letzteren ihren kleinsten Werth.

Beschreibt man um einen Brennpunkt F mit FA und FA^1 Kreise, so berühren beide die Ellipse; der eine liegt ganz außerhalb derselben, den anderen umschließt sie.

Beschreibt man über der großen Axe als Durchmesser einen Kreis, so berührt derselbe die Ellipse umschließend, beschreibt man über der kleinen Axe als Durchmesser einen Kreis, so berührt derselbe die Ellipse von innen. (Umbeschriebener und einbeschriebener Kreis der Ellipse.)

6) Verlängert man die Ordinate PM eines Punktes P der Ellipse über P bis zum Durchschnittspunkt K mit dem umbeschriebenen Kreise, so verhält sich die Ordinate KM des Kreises zu der zugehörigen Ordinate PM der Ellipse, wie die große Axe zur kleinen. Denn $KM^2 = AM \cdot A^1M = (a + x) \cdot (a - x) = a^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot PM^2$.

Anwendung dieses Satzes zur Construction der Ellipse.

Fällt man von einem Punkte P der Ellipse eine Senkrechte auf die kleine Axe, so verhält sich dieselbe zu ihrem in dem einbeschriebenen Kreise liegenden Abschnitt, wie die große Axe zur kleinen.

Nimmt man den Abstand AM der Ordinate PM eines Punktes P der Ellipse vom Scheitel A als Abscisse an, so ist $KM^2 = \frac{a^2}{b^2}y^2 = AM \cdot$

$A'M = x\,(2a - x)$, oder wenn man die durch den Brennpunkt gehende zur großen Axe senkrechte Sehne — den sogenannten Parameter der Ellipse — durch p bezeichnet, $y^2 = p \cdot x - \frac{p x^2}{2a}$. Diese Gleichung heißt die Gleichung der Ellipse in Beziehung auf ihren Scheitel A.

7) Eine Gerade, welche den Nebenwinkel des von den Radienvectoren eines Punktes P der Ellipse gebildeten Winkels halbirt, ist eine Tangente der Ellipse.

Denn verlängert man F^1P um $PQ = PF$, so ist $F^1Q = 2a$. Ist nun R ein beliebiger zweiter Punkt der Winkelhalbirenden PT, so ist $RF = RQ$, daher $RF + RF^1 = RQ + RF^1 > F^1Q$, also $> 2a$.

Umkehrung dieses Satzes.

Die Normale PN eines Punktes P der Ellipse halbirt den Winkel der zugehörigen Radienvectoren.

Erklärung der Benennung „Brennpunkte" durch die optischen Eigenschaften eines Spiegels mit elliptischen Durchschnittsflächen.

Die Tangente und die Normale eines Punktes P der Ellipse theilen den Abstand FF^1 der Brennpunkte harmonisch.

Die Subtangente TM des Punktes P der Ellipse ist zugleich eine Subtangente des umbeschriebenen Kreises. Denn zieht man TK und nimmt an, diese Linie schneide den umbeschriebenen Kreis in einem zweiten Punkte K^1, so ist, wenn die auf AA^1 senkrechte K^1M^1 die Tangente TP in Q^1 schneidet, $KM : PM = K^1M^1 : Q^1M^1 = a : b$. Daher müßte Q ebenfalls ein Punkt der Ellipse sein. Da dies der Annahme widerspricht, so kann K^1 nicht auf der Peripherie des umbeschriebenen Kreises liegen, oder TK berührt diesen Kreis in K.

Daher ist $KM^2 = AM \cdot A^1M = TM \cdot CM$, oder $CM : AM = A^1M : TM$, d. h. die Subtangente TM des Punktes P der Ellipse ist vierte Proportionale zu der Abscisse dieses Punktes und den beiden Abschnitten AM, A^1M der großen Axe, oder $TM = \frac{a^2 - x^2}{x} \cdot$ — Für alle Ellipsen, welche die große Axe gemeinschaftlich haben, sind die zu derselben Abscisse gehörigen Subtangenten einander gleich.

Ferner ist für die Subnormale MN, $PM^2 = TM \cdot MN$, oder $MN = \frac{PM^2}{TM} = \frac{y^2 \cdot x}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2} x$, oder die Subnormale verhält sich zur Abscisse, wie das Quadrat der kleinen Axe zu dem der großen Axe.

8) Zwei Tangenten einer Ellipse, welche dieselbe in den Endpunkten eines Durchmessers PP^1 berühren, sind einander parallel. Beweis mittelst des Parallelogramms PFP^1F^1.

Fällt man von einem Brennpunkt F auf eine Tangente PT einer Ellipse eine Senkrechte FS, so liegt der Fußpunkt S derselben auf der Peripherie des der Ellipse umbeschriebenen Kreises.

Denn verlängert man F^1P über P um $PQ = PF$, so ist $F^1Q = 2a$, und $FS = SQ$. Zieht man noch SC, so ist, da $FC : F^1C = FS : SQ = 1 : 1$ ist, $SC \parallel F^1Q$ und $SC = \frac{1}{2}F^1Q = a$.

Fällt man von beiden Brennpunkten auf jede von zwei parallelen Tangenten einer Ellipse eine Senkrechte, so liegen die Eckpunkte des entstandenen Rechtecks auf der Peripherie des umbeschriebenen Kreises.

Umgekehrt, construirt man in den der Ellipse umbeschriebenen Kreis ein Rechteck, von welchem zwei Seiten durch die Brennpunkte gehen, so sind die beiden anderen Seiten des Rechtecks Tangenten der Ellipse, und construirt man in den der Ellipse umbeschriebenen Kreis ein Rechteck, von welchem zwei Seiten Tangenten der Ellipse sind, so geht jede der anderen Seiten durch einen Brennpunkt.

9) Zieht man durch einen beliebigen Punkt P der Ellipse eine Tangente PT und den Durchmesser PP^1, zieht man ferner den Durchmesser $VV^1 \parallel PT$, so ist die Summe der Quadrate der Abscissen CM, CD der Punkte P und V gleich dem Quadrat der Hälfte der großen Axe.

Denn $\triangle PTM \backsim CVD$, daher, wenn man $PM = y$, $CM = x$, $VD = y_1$, $CD = x_1$ setzt, $y \cdot x_1 = TM \cdot y_1$. Setzt man hierein $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$, $TM = \frac{a^2 - x^2}{x}$, so erhält man durch Entwickelung der Gleichung $x^2 + x_1^2 = a^2$.

Daher ist $x_1 = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{b}y$ und $x = \frac{a}{b}y_1$ oder $x_1 : y = x : y_1$, oder $x \cdot y = x_1 \cdot y_1$. Die Dreiecke CMP, CVD haben gleiche Flächeninhalte.

Zieht man ferner durch V eine Parallele zu PC, welche die Verlängerung der großen Axe in U treffe, so ist $\triangle VDU \backsim PMC$, daher $UD : CM = VD : PM$, oder $UD : x = y_1 : y$, also $UD : x = x : x_1$, $UD = \frac{x^2}{x_1} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$. UD ist also gleich der Subtangente des Punktes V, woraus folgt, daß VU die Ellipse in V berührt.

Zieht man also in einer Ellipse einen Durchmesser PP^1 durch den Berührungspunkt P einer Tangente und einen zweiten Durchmesser VV^1 parallel zu der Tangente, so sind die durch die Endpunkte des letzteren Durchmessers parallel zu dem ersteren gezogenen Geraden ebenfalls Tangenten der Ellipse.

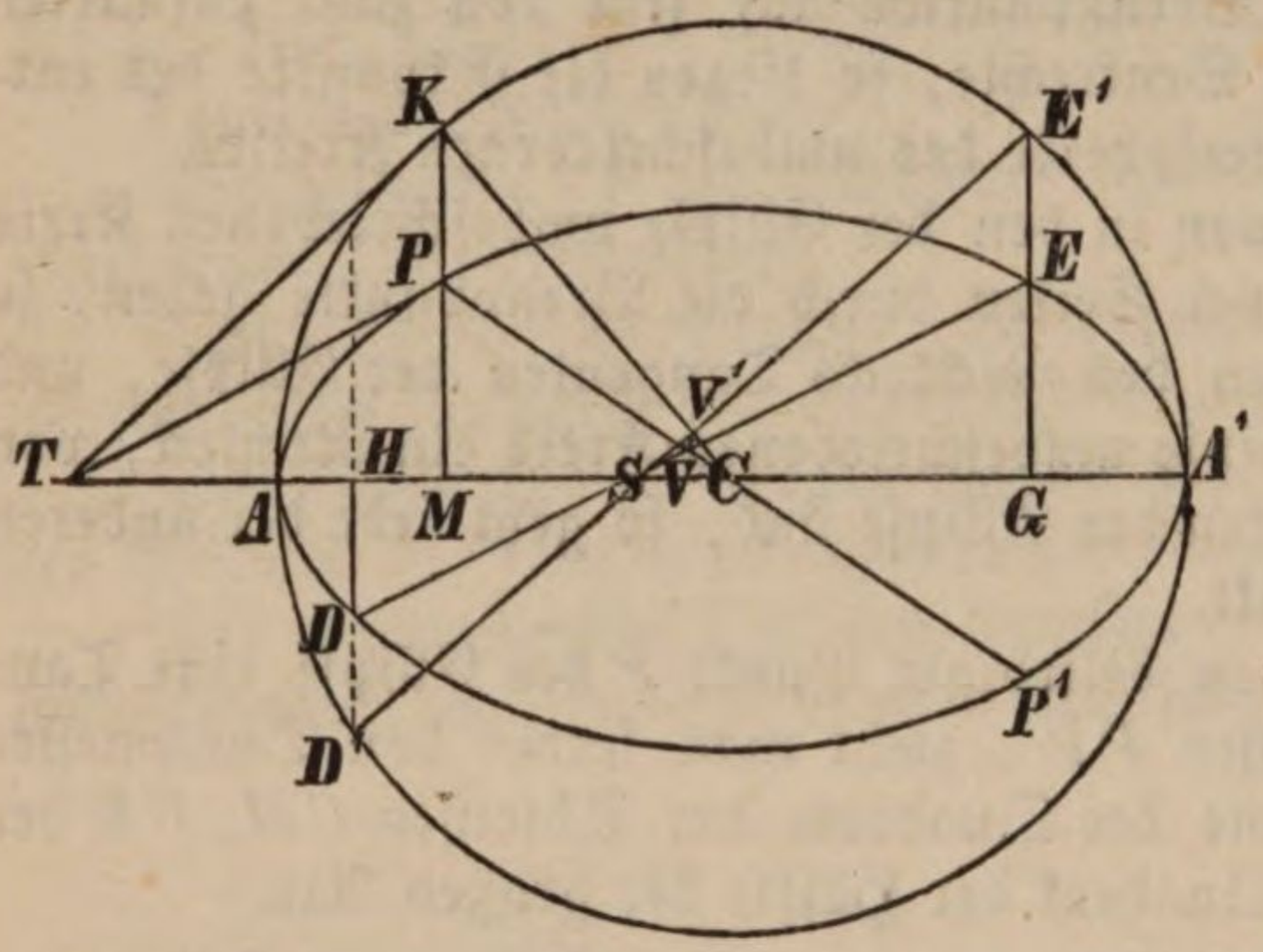
Zwei Durchmesser, welche die im Vorstehenden angegebene Lage zu einander haben, heißen conjugirte Durchmesser.

Umgekehrt, zieht man durch die Endpunkte des einen von zwei conjugirten Durchmessern Tangenten an die Ellipse, so sind dieselben dem anderen Durchmesser parallel.

Die vier durch die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser gehenden Tangenten sind die Seiten eines der Ellipse umbeschriebenen Parallelogrammes.

Zieht man zu einer Tangente einer Ellipse eine parallele Sehne, so wird dieselbe durch den nach dem Berührungspunkt der Tangente führenden Durchmesser halbirt.

Es sei in P die Tangente PT gezogen, welche die Verlängerung der großen Axe AA^1 in T schneide, PM senkrecht zu AA^1 und K der Durchschnittspunkt von PM mit der Peripherie des umbeschriebenen Kreises.



Es sei ferner DE die zu PT parallele, vom Durchmesser PP^1 in V geschnittene Sehne, S ihr Durchschnittspunkt mit AA^1, $DH \perp AA^1$, $EG \perp AA^1$ und D^1 der Durchschnittspunkt von HD, E^1 der Durchschnittspunkt von GE mit dem über AA^1 beschriebenen Kreis AKA^1. Dann ist $D^1H : DH = E^1G : EG = a : b$, also $D^1H : E^1G = DH : EG = SH : SG$. Daher schneidet E^1D^1 die große Axe ebenfalls in S. — Ferner ist $\triangle HDS \backsim PMT$, also $SH : TM = DH : PM = D^1H : KM$, also auch $\triangle KMT \backsim HD^1S$, daher $SD^1 \parallel TK$. Daher wird die Sehne D^1E^1 des umschriebenen Kreises von dem nach dem Berührungspunkt der Tangente TK gehenden Radius CK in V^1 halbirt. Verbindet man nun V^1 mit V, so ist $\triangle CPT \backsim CVS$ und $\triangle CKT \backsim CV^1S$, daher $CK : CV^1 = CP : CV$ $(= CT : CS)$, also $VV^1 \parallel KP$, daher $E^1V^1 : E^1D^1 = EV : ED$. Also wird auch DE in V halbirt.

Von zwei conjugirten Durchmessern einer Ellipse halbirt also jeder alle dem anderen parallele Sehnen, und die Halbirungspunkte aller einander parallelen Sehnen einer Ellipse liegen auf einer Geraden, nämlich auf dem Durchmesser, dessen conjugirter den Sehnen parallel ist.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Ellipse mit den Scheiteln A, A^1 der großen Axe, so heißen die Linien PA, PA^1 die Supplementarsehnen der Ellipse für diesen Punkt. Jede Supplementarsehne ist dem Durchmesser parallel, welcher zu dem sie halbirenden Durchmesser conjugirt ist, und umgekehrt. Denn wird AP in H halbirt, so ist $AH : HP = AC : CA^1$, also $CH \parallel PA^1$.

Aus den oben für die Coordinaten der Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser PP^1, VV^1 gefundenen Werthen folgt noch: $y^2 + y_1^2 = b^2$. Ferner ist $PC^2 = y^2 + x^2$, $VC^2 = y_1^2 + x_1^2$, daher $PC^2 + VC^2 = a^2 + b^2$, oder $PP^{1\,2} + VV^{1\,2} = AA^{1\,2} + BB^{1\,2}$. In Worten? — Ferner ist $CD^2 = a^2 - CM^2$ und $TM = \frac{a^2 - CM^2}{CM}$, also $CD^2 = CM \cdot TM$. —

Für den Halbmesser VC ergiebt sich $VC : CD = TP : TM$, also $VC = \frac{CD \cdot TP}{TM} = \frac{\sqrt{CM \cdot TM \cdot TP}}{TM} = TP \cdot \sqrt{\frac{CM}{TM}}$.

Fällt man vom Mittelpunkt C die Senkrechte CG auf die Tangente PT, so ist $\triangle TGC \backsim TPM$, daher $CG : TC = PM : TP$, $CG = \frac{TC \cdot PM}{TP}$.

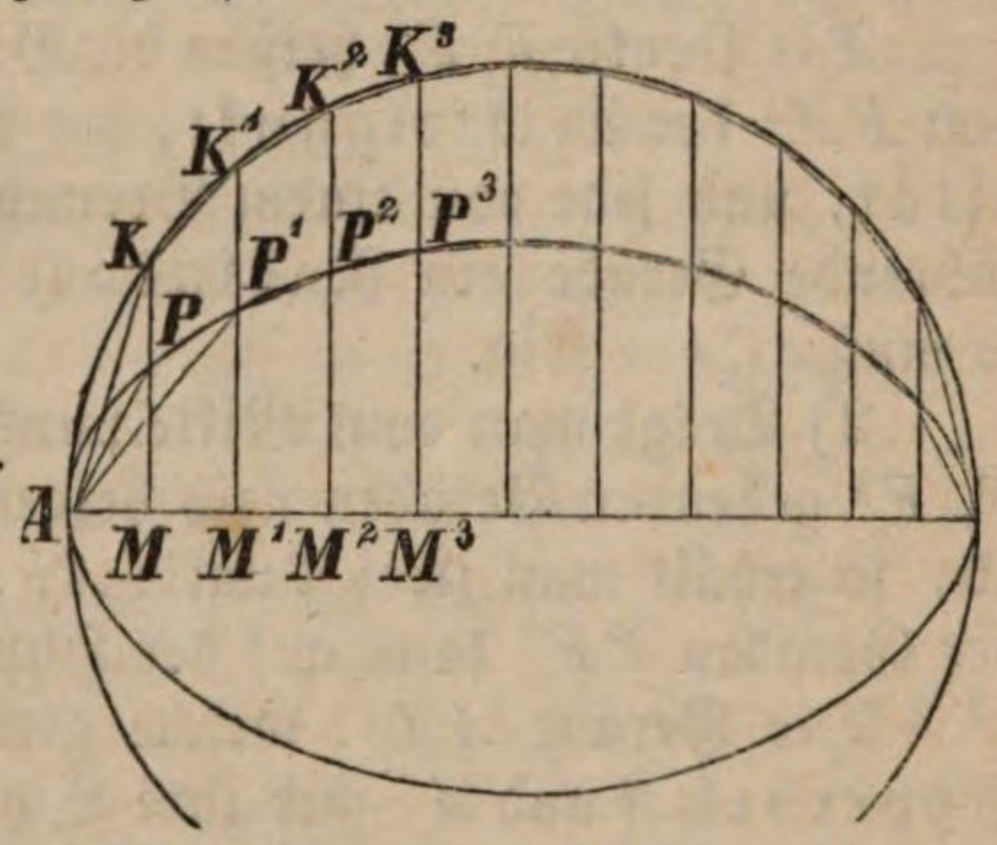
Nun ist $TC = TM + CM = \frac{a^2 - x^2}{x} + x = \frac{a^2}{x}$, also $CG = \frac{a^2 y}{x \cdot TP}$,

demnach $VC \cdot CG = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot TP \cdot \frac{a^2 y}{x \cdot TP} = \frac{a^2 y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \cdot \frac{b}{a} = ab$.

Der Inhalt eines Parallelogramms, dessen Seiten zwei conjugirte Halbmesser sind, hat also einen constanten Werth, nämlich gleich dem Rechteck aus den Hälften der beiden Axen. Der Inhalt eines Parallelogramms, dessen Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser sind, hat den constanten Werth $2ab$, der eines Parallelogramms, dessen Seiten die durch die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser gehenden Tangenten sind, den constanten Werth $4ab$.

10) Der Flächeninhalt einer Ellipse verhält sich zu dem des umbeschriebenen Kreises, wie die kleine Axe zur großen.

Denn nimmt man auf der Ellipse beliebig viele Punkte P, P^1, P^2, P^3 ... an, zieht ihre Ordinaten PM, P^1M^1 u. s. w., verlängert diese über P, P^1 ... bis sie die Peripherie des umbeschriebenen Kreises in K, K^1 ... treffen, und beschreibt durch Verbindung der Punkte P, P^1 ... und der Punkte K, K^1 ... sowohl in die Ellipse, als in den Kreis ein Polygon, so ist für je zwei zusammengehörige Trapeze PMM^1P^1 und KMM^1K^1, wenn wir deren Inhalt bezüglich durch i, I (i^1, I^1 u. s. w.) bezeichnen, $\frac{i}{I} = \frac{PM + P^1M^1}{KM + K^1M^1}$, oder, da $\frac{PM}{KM} = \frac{P^1M^1}{K^1M^1}$, also auch $\frac{PM + P^1M^1}{KM + K^1M^1} = \frac{PM}{KM} = \frac{b}{a}$ ist, $\frac{i}{I} = \frac{b}{a}$. Bezeichnet nun f den Flächenraum der Ellipse, F den des Kreises, so ist, je näher die Punkte P, P^1 ... bei einander liegen, desto genauer $f = i + i_1 + i_2 + \ldots$, $F = I + I_1 + I_2 + \ldots$, also $\frac{f}{F} = \frac{i + i_1 + i_2 + \ldots}{I + I_1 + I_3 + \ldots} = \frac{i}{I} = \frac{b}{a}$. Diese Gleichung gilt somit auch für die Grenzen der beiden Polygone bei unendlich wachsender Seitenzahl, also für die Ellipse und den Kreis.



Daher ist der Flächeninhalt der Ellipse gleich $\frac{b}{a} \cdot a^2\pi = ab\pi$.

Wie berechnet man den Flächeninhalt eines von einem Bogen, den zugehörigen Ordinaten und der großen Axe begrenzten Stückes der Ellipse, wie den eines durch zwei zur großen Axe senkrechte Sehnen abgeschnittenen Stückes, oder eines durch eine solche Sehne begrenzten Segmentes? Wie findet man allgemein den Flächeninhalt eines Segmentes der Ellipse, wie den eines Sectors, d. h. eines von zwei von demselben Brennpunkt ausgehenden Radienvectoren und dem zwischen diesen liegenden Bogen der Ellipse begränzten Flächenstückes?

Als besonderer Fall der Ellipse kann die Kreislinie betrachtet werden, für welche die Excentricität gleich Null ist, die Brennpunkte also im Mittelpunkt zusammenfallen.

C. Die Hyperbel.

1) Erklärung: Der geometrische Ort eines Punktes P, für welchen die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten F, F^1 einen sich gleich bleibenden Werth $2a$ hat, heißt eine Hyperbel.

Construction beliebig vieler Punkte der Hyperbel durch Kreisbogen, deren Mittelpunkte F und F^1 sind, und bei denen die Differenz der Radien für je zwei zusammengehörige Kreise gleich $2a$ ist.

Die Punkte F, F^1 heißen die Brennpunkte, der Halbirungspunkt C von FF^1 der Mittelpunkt, die Abstände $CF = CF^1$ die Excentricität, und jede von einem Brennpunkt nach einem Punkte der Hyperbel führende Gerade ein Radiusvector. Bezeichnet c die Excentricität, so muß $c > a$ sein.

2) Trägt man vom Mittelpunkt C aus auf der durch die Brennpunkte F, F^1 gehenden Geraden nach beiden Seiten die Strecken $CA = CA^1 = a$ ab, so erhält man zwei Punkte A, A^1 der Hyperbel. Kein anderer Punkt der Geraden FF^1 kann auf der Hyperbel liegen.

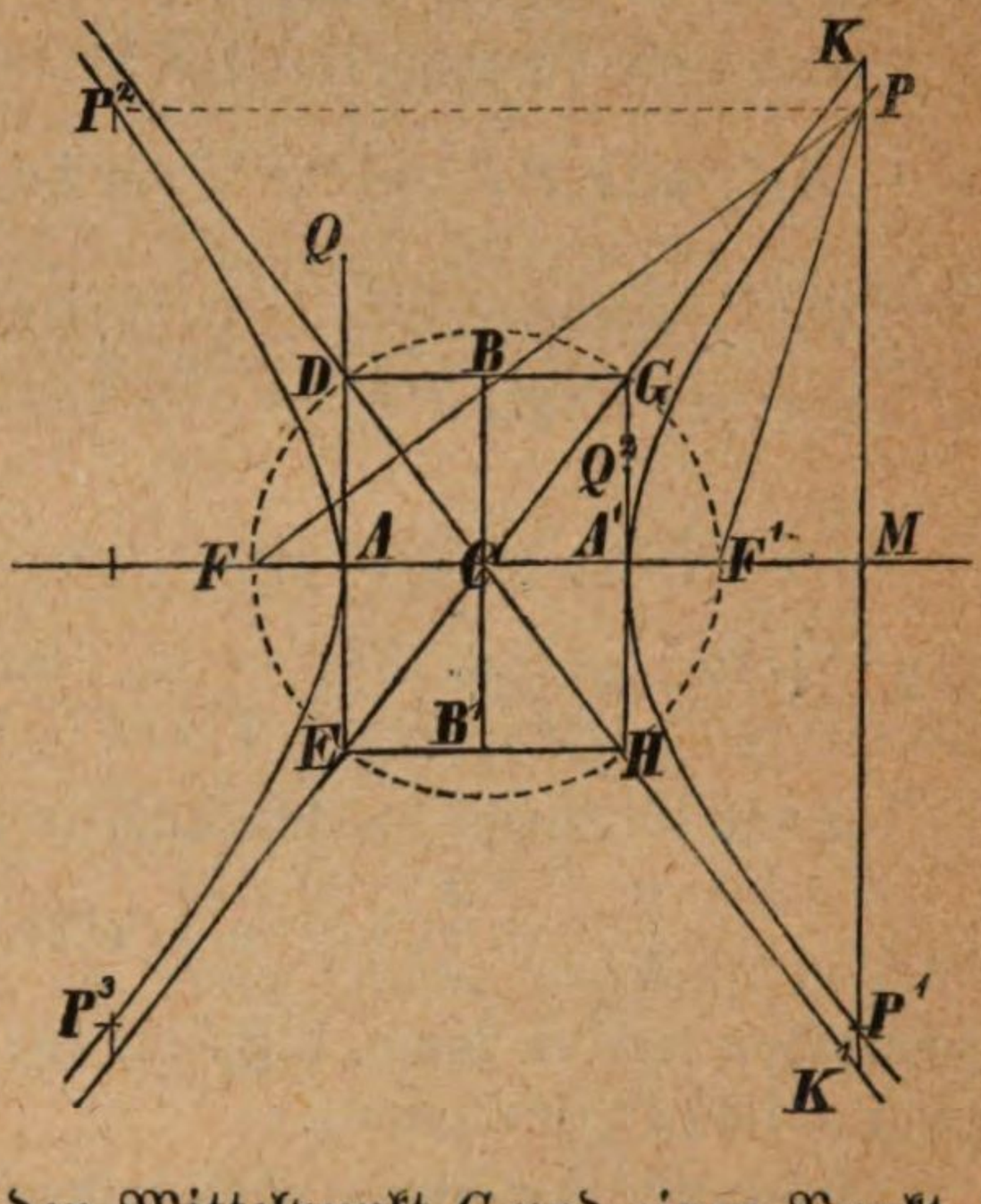
Die Gerade AA^1, welche gleich $2a$ ist, heißt die große Axe der Hyperbel, A und A^1 sind ihre Scheitel. Eine durch C gehende, zu FF^1 senkrechte Gerade wird die kleine Axe genannt. Man begränzt dieselbe durch zwei Punkte B, B^1, so daß $CB = CB^1$ und $CB^2 = b^2 = c^2 - a^2$ ist. Die halbe kleine Axe ist also die mittlere Proportionale zwischen den Abständen eines Scheitels von den beiden Brennpunkten.

Beschreibt man um den Mittelpunkt C mit der Excentricität CF einen Kreis, zieht in demselben die zu AA^1 senkrechten Sehnen DE und GH durch die Scheitel und zieht die zugehörigen Seiten DG, EH des einbeschriebenen Rechtecks, so schneiden letztere die kleine Axe in ihren Endpunkten B, B^1.

Die unendlich verlängert gedachten Diagonalen dieses Rechtecks heißen die Asymptoten der Hyperbel.

3) Fällt man von einem beliebigen Punkte P einer Hyperbel eine Senkrechte PM auf die große Axe (d. h. hier auf die durch AA^1 gehende

unbegrenzte Gerade) und verlängert dieselbe über M um $MP^1 = PM$, so ist auch P^1 ein Punkt der Hyperbel. — Auf der durch P und P^1 gehenden Geraden kann kein dritter Punkt der Hyperbel liegen. — Die große Axe theilt die Hyperbel symmetrisch.



Ebenso gehört zu jedem Punkt P der Hyperbel ein zweiter Punkt P^2, so daß PP^2 senkrecht zur kleinen Axe (oder deren Verlängerung) steht und von ihr halbirt wird. — Die Hyperbel hat also auch gegen die kleine Axe eine symmetrische Lage.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Hyperbel mit dem Mittelpunkt C und verlängert PC über C um $CP^3 = CP$, so ist P^3 ebenfalls ein Punkt der Hyperbel. — Auf der durch P, P^3 gehenden Geraden kann kein dritter Punkt der Hyperbel liegen. — Jede durch den Mittelpunkt C und einen Punkt P der Hyperbel gezogene Gerade schneidet also die Hyperbel in zwei Punkten, deren Abstand durch C halbirt wird. — Eine solche, durch C gehende und von zwei Hyperbelpunkten begrenzte Gerade heißt ein Durchmesser derselben.

Zu jedem Punkte P der Hyperbel gehören drei andere P^1, P^2, P^3, so daß die vier Punkte die Ecken eines Rechtecks bilden, dessen Seiten den Axen parallel und dessen Diagonalen Durchmesser der Hyperbel sind.

4) Errichtet man in jedem Scheitel der großen Axe auf dieser eine Senkrechte, so berühren die Senkrechten die Hyperbel und es kann kein zwischen denselben liegender Punkt auf der Hyperbel liegen. Denn ist Q ein Punkt der in A errichteten Senkrechten, so ist $QF^{1\,2} - QF^2 = AF^{1\,2} - AF^2$, oder $(QF^1 + QF)(QF^1 - QF) = (AF^1 + AF)(AF^1 - AF) = FF^1 \cdot AA^1$. Nun ist $QF^1 + QF > FF^1$, daher $QF^1 - QF < AA^1$ oder $< 2a$. Ist Q^2 ein Punkt der in A^1 errichteten Senkrechten, so ist ebenso $Q^2F - Q^2F^1 < 2a$. Liegt Q^1 auf der dem Brennpunkt F entgegengesetzten Seite der in A errichteten Senkrechten, so ist, wenn Q den Durchschnittspunkt von FQ^1 mit dieser Senkrechten bedeutet, $Q^1F^1 - Q^1Q < QF^1$, daher $Q^1F^1 - Q^1F = Q^1F^1 - Q^1Q - QF < QF^1 - QF$, also um so mehr $< 2a$. Aehnlich verfahre man für die Annahme, daß Q_1 auf der dem Brennpunkt F^1 abgewandten Seite der in A^1 errichteten Senkrechten liege.

Die Hyperbel besteht daher aus zwei völlig von einander getrennten, symmetrisch liegenden, von dieser nicht geschnittenen Zweigen. Auf dem einen derselben, dessen Scheitel dem Brennpunkt F näher als F^1 liegt, liegen alle diejenigen Punkte P, für welche $PF^1 - PF = 2a$, auf dem anderen alle, für welche $PF - PF^1 = 2a$ ist.

Die Benennungen Abscisse und Ordinate des Punktes P ($PM = y$, $CM = x$) in Beziehung auf den Mittelpunkt entsprechen den analogen Bezeichnungen bei der Ellipse.

Es ist für die Hyperbel $PF^{1\,2} = y^2 + (x - c)^2$, $PF^2 = y^2 + (c + x)^2$, also $PF^2 - PF^{1\,2} = 4cx$, daher $PF + PF^1 = \frac{2cx}{a}$. In Worten?

Hieraus folgt: $PF = \frac{cx + a^2}{a}$, $PF^1 = \frac{cx - a^2}{a}$, also auch

$$y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^2}, \text{ oder}$$

$$a^2y^2 + a^2(a^2 + b^2) - 2a^2cx + a^2x^2 = a^2x^2 + b^2x^2 - 2a^2cx + a^4, \text{ d. i. } a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Diese Gleichung, welche auch in den Formen

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1, \text{ oder } y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

geschrieben werden kann, heißt die Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf den Mittelpunkt.

Hieraus folgt außer schon bekannten Sätzen: Die Ordinaten wachsen mit zunehmenden Werthen von x (von $x = a$ bis $x = \infty$) ins Unendliche. Jeder Zweig der Hyperbel bildet somit eine zu beiden Seiten der großen Axe ins Unendliche fortlaufende, also nicht in sich zurückkehrende krumme Linie.

Fällt man von einem Punkte K einer Asymptote eine Senkrechte KM auf die große Axe, welche die Hyperbel in P schneide, so ist $KM : CM = b : a$, oder $KM = \frac{b}{a}x$; daher ist $PM = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ kleiner als KM, oder die von den Asymptoten eingeschlossenen Winkelräume, in welchen die Brennpunkte liegen, enthalten alle Punkte der Hyperbel. — Die Asymptoten selbst treffen die Hyperbel niemals.

Der Abstand KP der Punkte K und P ist um so kleiner, je größer x wird. Denn das Verhältniß $\frac{PM^2}{KM^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2} = 1 - \frac{a^2}{x^2}$ nähert sich um so mehr der Einheit, je größer x ist.

Daher kann man sagen, daß die Asymptoten einer Hyperbel dieselbe in unendlich weit entfernten Punkten berühren.

5) Sind die beiden Axen einer Hyperbel einander gleich, so heißt dieselbe eine gleichseitige. Die Asymptoten einer solchen bilden mit den Axen Winkel von 45^0.

Es ist für die gleichseitige Hyperbel $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}c^2$, und die Gleichung derselben ist $y^2 - x^2 = -a^2$. Die Ordinate $PM = y$ ist also gleich der mittleren geometrischen Proportionale zwischen den Abständen ihres Fußpunktes M von den beiden Scheiteln. Beschreibt man über der großen Axe AA^1 als Durchmesser einen Kreis und zieht an diesen von M aus die Tangente MT, so ist $MT = MP$.

Die Ordinate PM einer ungleichseitigen Hyperbel verhält sich zu der zugehörigen Ordinate einer gleichseitigen, welche dieselbe große Axe hat, wie die kleine Axe der ersteren zu der großen.

Rechnet man die Abscisse eines Punktes P einer Hyperbel von einem Scheitel A bis zum Fußpunkt M der Ordinate PM, so erhält man

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x\ (2a + x).$$

Eine zu der verlängerten großen Axe senkrechte Sehne der Hyperbel, welche durch einen Brennpunkt derselben geht, wird ihr Parameter genannt, und soll im Folgenden durch p bezeichnet werden.

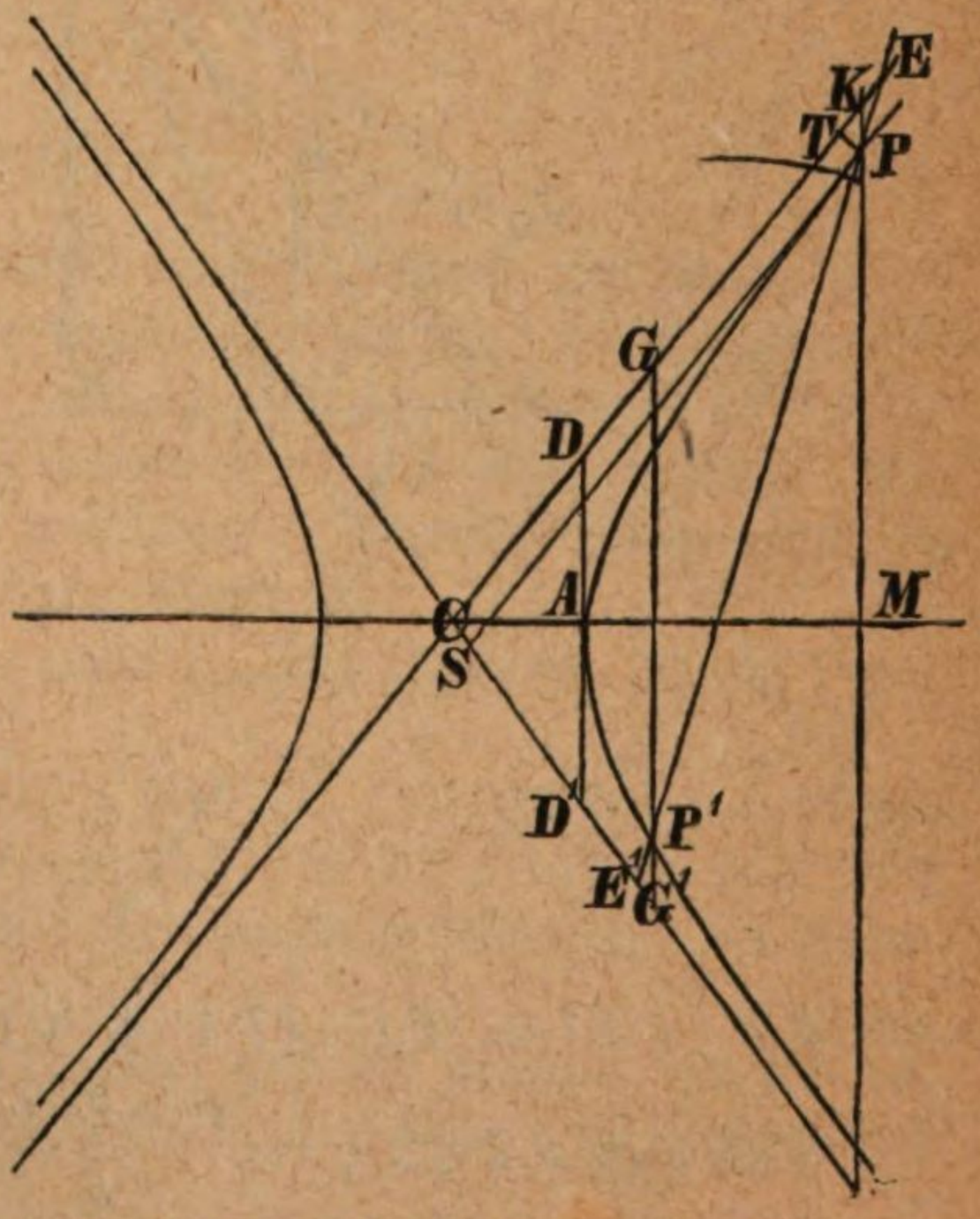
Der halbe Parameter ist die vierte Proportionale zu der halben großen Axe und der halben kleinen Axe, oder $\frac{1}{2} p = \frac{b^2}{a}$.

Setzt man in die obige Scheitelgleichung der Hyperbel $b^2 = \frac{1}{2} ap$ ein, so erhält dieselbe die Form $y^2 = px + \frac{p}{2a} x^2$.

Anmerkung: Die Scheitelgleichungen der drei Kegelschnitte können demnach in der Form $y^2 = px + qx^2$ zusammengefaßt werden, in welcher p den Parameter der krummen Linie bedeutet. Man erhält, je nachdem q gleich Null, oder negativ, oder positiv ist, eine Parabel, oder eine Ellipse, oder eine Hyperbel. In den beiden letzteren Fällen ist die Hauptaxe $2a = \frac{p}{q}$.

Für die gleichseitige Hyperbel ist der Parameter gleich jeder der beiden Axen.

6) Zieht man in einer Hyperbel eine zur verlängerten großen Axe senkrechte Sehne, und verlängert dieselbe bis zu den Asymptoten, so ist das Rechteck aus den von einem Hyperbelpunkt und den beiden Asymptoten begrenzten Abschnitten gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe ($PK \cdot PK^1 = b^2$).



Denn es ist $MK^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$, $MP^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2$, also $MK^2 - MP^2 = b^2 = (MK + MP)\ (MK - MP) = (MK^1 + MP)\ (MK - MP) = PK^1 \cdot PK$.

Zieht man durch eine Hyperbel eine beliebige Secante, so sind die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegenden Abschnitte derselben paarweise gleich.

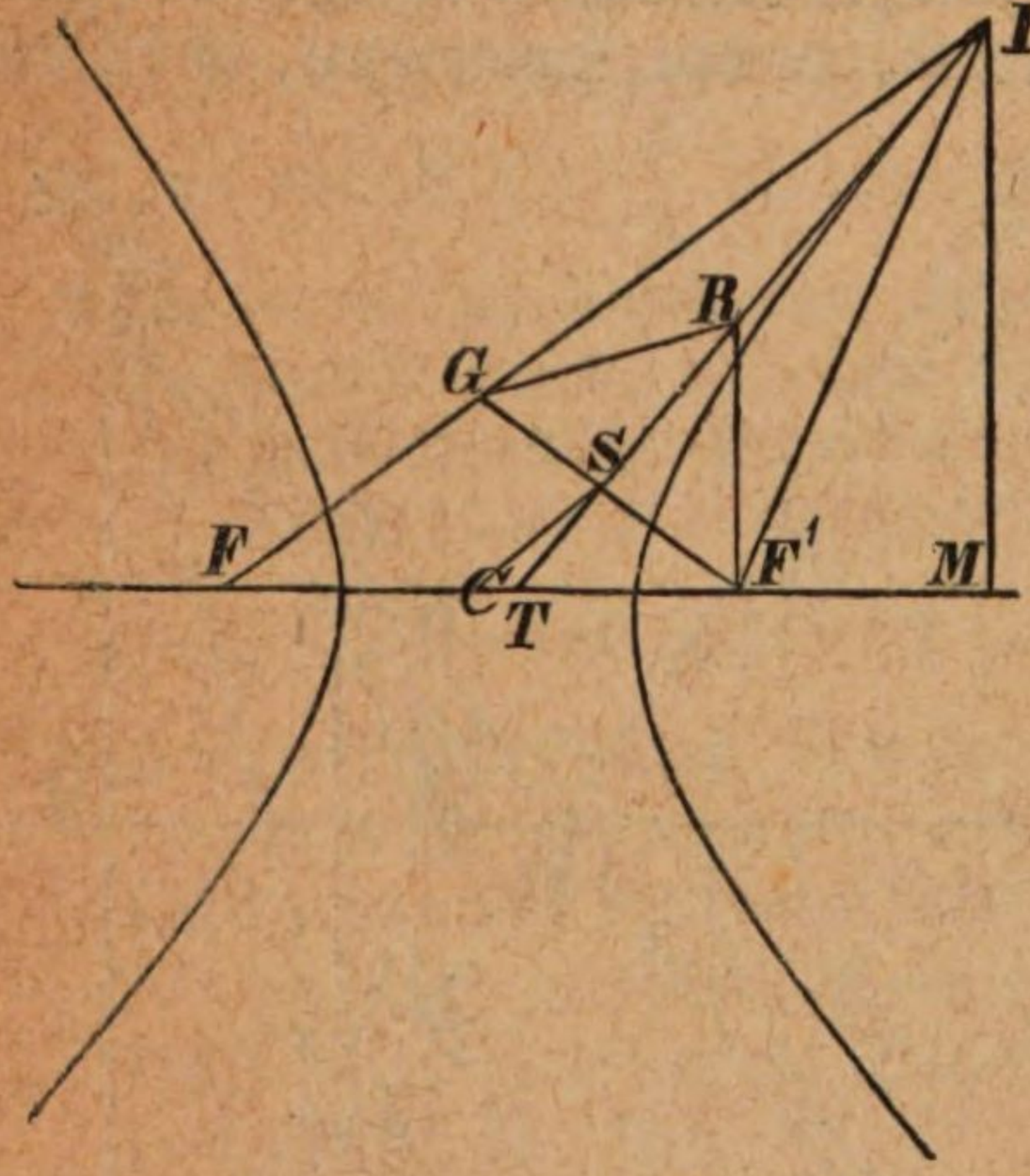
Die Secante PP^1 schneide die Asymptoten in E und E^1, die Hyperbel in P und P^1. Man ziehe KK^1 durch P und GG^1 durch P^1 senkrecht

zur verlängerten großen Axe, so ist $PK \cdot PK^1 = P^1G \cdot P^1G^1 = b^2$, und, da $KP \parallel GP^1$ und $P^1G^1 \parallel PK^1$ ist, $PK : PE = P^1G : P^1E$, oder $PK = \frac{PE \cdot P^1G}{P^1E}$, und $P^1G^1 : P^1E^1 = PK^1 : PE^1$, oder $PK^1 = \frac{PE^1 \cdot P^1G^1}{P^1E^1}$, also $PK \cdot PK^1 = \frac{PE \cdot PE^1 \cdot P^1G \cdot P^1G^1}{P^1E \cdot P^1E^1} =$ $P^1G \cdot P^1G^1$, oder $\frac{PE \cdot PE^1}{P^1E \cdot P^1E^1} = 1$, $\frac{PE}{P^1E} = \frac{P^1E^1}{PE^1}$; $\frac{PE}{P^1E - PE} =$ $\frac{P^1E^1}{PE^1 - P^1E^1}$, $\frac{PE}{PP^1} = \frac{P^1E^1}{PP^1}$, also $PE = P^1E^1$.

Zieht man durch einen Punkt P einer Hyperbel eine Parallele PS, PT zu je einer Asymptote bis zum Durchschnittspunkt ST mit der anderen, so hat das Rechteck aus den Linien PS und CS (den Asymptotencoordinaten des Punktes P) für alle Punkte der Hyperbel denselben Werth.

Denn zieht man durch P die Senkrechte KK^1 zur verlängerten Hauptaxe und durch den Scheitel A die Senkrechte DD^1 zu AC zwischen den Asymptoten, so ist $\frac{PS}{PK^1} = \frac{DC}{DD^1} = \frac{c}{2b}$, und $\frac{PT}{PK} = \frac{CD^1}{DD^1} = \frac{c}{2b}$, also $\frac{PS \cdot PT}{PK \cdot PK^1} = \frac{c^2}{4b^2}$, oder, wegen $PK \cdot PK^1 = b^2$, $PS \cdot PT = \frac{1}{4}c^2$.

7) Die Halbirungslinie des von den Radienvectoren eines Punktes P einer Hyperbel gebildeten Winkels ist eine Tangente derselben.



Denn ist R irgend ein anderer Punkt der Winkelhalbirenden PT, und macht man $PG = PF^1$, so ist $RF^1 = RG$, daher $RF - RF^1 = RF - RG < GF$, d. i. $< PF - PF^1$, oder $< 2a$.

Die Normale eines Punktes P der Hyperbel halbirt den Nebenwinkel des von den Radienvectoren dieses Punktes gebildeten Winkels.

Die Tangente und die Normale eines Punktes P der Hyperbel theilen den Abstand der beiden Brennpunkte von einander harmonisch.

Es ist $FT : F^1T = PF : PF^1$, daher auch $FT : (FT + F^1T) = PF : (PF + PF^1)$, oder $FT : FF^1 = PF : (PF + PF^1)$.

Daher ist $FT : 2c = \frac{cx + a^2}{a} : \frac{2cx}{a}$, oder $FT = c + \frac{a^2}{x}$.

Für die Subtangente MT findet man hieraus

$MT = \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$, für die Subnormale MN, $\frac{b^2 x}{a^2}$.

8) Zwei Tangenten einer Hyperbel, welche dieselbe in den Endpunkten eines Durchmessers berühren, sind einander parallel.

Fällt man von einem Brennpunkt F^1 auf eine Tangente PT einer Hyperbel eine Senkrechte F^1S, so liegt der Fußpunkt S derselben auf der Peripherie des über der großen Axe AA^1 als Durchmesser beschriebenen Kreises.

Denn trägt man auf PF die Strecke $PG = PF^1$ ab, so ist $FG = 2a$, und $SG = F^1S$, auch F^1SG eine Gerade. Zieht man noch SC, so ist, wegen $F^1S : SG = F^1C : CF = 1 : 1$, $SC \parallel GF$, daher auch $SC = \frac{1}{2} GF = a$. Aehnlich ist der Beweis für das von F auf PT gefällte Perpendikel.

Fällt man von beiden Brennpunkten auf jede von zwei parallelen Tangenten einer Hyperbel eine Senkrechte, so liegen die Eckpunkte des entstehenden Rechtecks auf der Peripherie des über AA^1 beschriebenen Kreises.

Umgekehrt, construirt man in diesen Kreis ein Rechteck, von welchem zwei Seiten durch je einen Brennpunkt gehen, so sind die beiden anderen Seiten Tangenten der Hyperbel, und construirt man in diesen Kreis ein Rechteck, von welchem zwei Seiten Tangenten der Hyperbel sind, so geht jede der anderen Seiten durch einen Brennpunkt.

Anmerkung: Die meisten Eigenschaften der Hyperbel zeigen eine gewisse Analogie mit solchen der Ellipse. Auch zu mehreren Sätzen über die letztere, zu welchen im Vorstehenden keine entsprechenden über die Hyperbel aufgestellt sind, lassen sich solche auffinden, so z. B. über die Halbirungspunkte paralleler Sehnen und ihre Beziehungen zu Durchmessern. Die vorstehende Auswahl von Sätzen wird jedoch für unsern Zweck genügen.

Aufgaben:

1) Eine Parabel zu construiren, wenn der Parameter p gegeben ist.

2) An eine gegebene Parabel in einem gegebenen Punkte derselben eine Tangente zu construiren.

3) Von einer Parabel sind der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben. Man construire denjenigen Punkt derselben, in welchem sie von einer Tangente berührt wird, die durch einen in der Axe gegebenen Punkt geht.

4) Von einem beliebigen außerhalb einer Parabel gegebenen Punkte B eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

5) Von einer Parabel sei eine Sehne und der Scheitel des zugehörigen Durchmessers gegeben; man soll den Brennpunkt und die Leitlinie construiren.

6) Eine Parabel zu construiren, wenn zwei Punkte derselben und der Brennpunkt gegeben sind.

7) Ebenso, wenn zwei Punkte der Parabel und die Leitlinie gegeben sind.

8) Ebenso, wenn zwei Punkte und die Axe der Lage nach gegeben sind. (Mittelst $y^2 : {y_1}^2 = x : x_1$.)

9) Den Flächeninhalt des durch eine zur Axe senkrechte Sehne abgeschnittenen

Parabelsegmentes zu berechnen, wenn der Parameter gleich 14 und die Abscisse für jene Sehne gleich 56 gegeben sind.

10) Aus dem Flächeninhalt F eines Parabelsegments, dessen Sehne senkrecht zur Axe steht und der Abscisse x die Sehne zu berechnen.

---

11) Die Brennpunkte einer Ellipse zu construiren, deren Axen gegeben sind.

12) Zu einem gegebenen Durchmesser einer Ellipse den conjugirten Durchmesser zu construiren.

13) An eine Ellipse durch einen gegebenen Punkt derselben eine Tangente zu ziehen.

14) An eine Ellipse von einem gegebenen Punkt auf der Verlängerung der großen Axe eine Tangente zu ziehen.

15) An eine Ellipse von einem beliebig außerhalb derselben angenommenen Punkte eine Tangente zu ziehen.

16) Eine Ellipse zu construiren, wenn die Scheitel der großen Achse und ein dritter Punkt der Ellipse gegeben sind.

17) Ueber einer gegebenen Geraden als der großen Axe eine Ellipse zu construiren, die eine gegebene Gerade berührt.

18) Eine Ellipse zu construiren, wenn ein Brennpunkt und ein Durchmesser gegeben sind.

19) Zu einer gegebenen Linie als der Axe eine gleichseitige Hyperbel zu construiren.

20) An eine Hyperbel durch einen gegebenen Punkt derselben eine Tangente zu ziehen.

21) Ebenso von einem Punkte auf der großen Axe.

22) Ebenso von einem beliebigen, außerhalb der Hyperbel angenommenen Punkte.

23) Eine Hyperbel zu construiren, wenn ein Punkt derselben und die Scheitel gegeben sind.

24) Ebenso, wenn die Scheitel gegeben sind und eine gegebene Gerade von der Hyperbel berührt werden soll.

25) Ebenso, wenn die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel gegeben sind.

Verlag der G. Grote'schen Verlagsbuchhandlung (C. Müller) in Berlin.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Parabelsegmentes zu berechnen, wenn der Parameter gleich 14 und die Abscisse für jene Sehne gleich 56 gegeben sind.

10) Aus dem Flächeninhalt F eines Parabelsegments, dessen Sehne senkrecht zur Axe steht und der Abscisse x die Sehne zu berechnen.

---

11) Die Brennpunkte einer Ellipse zu construiren, deren Axen gegeben sind.

12) Zu einem gegebenen Durchmesser einer Ellipse den conjugirten Durchmesser zu construiren.

13) An eine Ellipse durch einen gegebenen Punkt derselben eine Tangente zu ziehen.

14) An eine Ellipse von einem gegebenen Punkt auf der Verlängerung der großen Axe eine Tangente zu ziehen.

15) An eine Ellipse von einem beliebig außerhalb derselben angenommenen Punkte eine Tangente zu ziehen.

16) Eine Ellipse zu construiren, wenn die Scheitel der großen Achse und ein dritter Punkt der Ellipse gegeben sind.

17) Ueber einer gegebenen Geraden als der großen Axe eine Ellipse zu construiren, die eine gegebene Gerade berührt.

18) Eine Ellipse zu construiren, wenn ein Brennpunkt und ein Durchmesser gegeben sind.

19) Zu einer gegebenen Linie als der Axe eine gleichseitige Hyperbel zu construiren.

20) An eine Hyperbel durch einen gegebenen Punkt derselben eine Tangente zu ziehen.

21) Ebenso von einem Punkte auf der großen Axe.

22) Ebenso von einem beliebigen, außerhalb der Hyperbel angenommenen Punkte.

23) Eine Hyperbel zu construiren, wenn ein Punkt derselben und die Scheitel gegeben sind.

24) Ebenso, wenn die Scheitel gegeben sind und eine gegebene Gerade von der Hyperbel berührt werden soll.

25) Ebenso, wenn die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel gegeben sind.

Verlag der G. Grote'schen Verlagsbuchhandlung (C. Müller) in Berlin.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Reidt, Friedrich / Reidt, Friedrich, / Kerst, Bruno

Die Elemente der Mathematik ein Hülfsbuch für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten

Bd.: 2

Berlin 1868

Math.u. 301 c-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625530-4